Tópicos em Otimização

Otimização Linear - Aplicações

Problemas tratados por otimização linear

- Problema da Mistura: Combinar materiais obtidos na natureza (ou restos de outros já combinados) para gerar novos materiais ou produtos.

  - **Exemplo**: Produzir vários tipos de rações combinando misturas de alimentos ou farinhas de restos de alimentos (milho, soja, farinha de peixe ...). A composição nutricional e o custo dos ingredientes são conhecidos. A nutrição veterinária especifica as necessidades mínimas e máximas desses nutrientes por kg de ração de cada tipo de animal. Determinar quais devem ser as quantidades ideais de cada tipo de ingrediente por kg de ração de modo que as necessidades nutricionais sejam atendidas e o custo total dos ingredientes seja o menor possível.

Problemas tratados por otimização linear

- Formulação Matemática:

n: número de ingredientes usados na mistura;

m: número de componentes relevantes para mistura

variáveis de decisão $\mathbf{x_j}$**:** quantidade do ingrediente j que deve ser utilizada em uma unidade da mistura, j=1,2,3,...,n

$\mathbf{a_{ij}}$**:** fração do componente i no ingrediente j

bi: fração do componente i na mistura

cj: custo de uma unidade do ingrediente j

$$Min \quad f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$

$$sa: \quad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n = b_1$$

$$sa: \quad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n = b_2$$

$$.....$$

$$sa: \quad a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n = b_m$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1,2,...,n$$

Problemas tratados por otimização linear

- **Exemplo**:

nutrientes	osso	soja	peixe	Ração
proteína	0,2	0,5	0,4	0,3
cálcio	0,6	0,4	0,4	0,5
Custo -kg	0,56	0,81	0,46	

$$Min \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0{,}56x_1 + 0{,}81x_2 + 0{,}46x_3$$

$$sa: \quad 0{,}2x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}4x_3 \geq 0{,}3$$

$$sa: \quad 0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}4x_3 \geq 0{,}5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1,2,3$$

Problemas tratados por otimização linear

- Problema de transporte, transbordo e designação: transportar ou distribuir produtos dos centros de produção aos mercados consumidores (petróleo, máquinas, energia elétrica). de forma que o custo total de transporte seja o menor possível

  - **Exemplo**: Transportar o produto dos centros de produção aos mercados consumidores de modo que o custo total de transporte seja o menor possível. Geralmente, admite-se que as quantidades produzidas ou ofertadas em cada centro e as quantidades demandas em cada mercado consumidor são conhecidas. O transporte deve ser efetuado respeitando-se as limitações de oferta e atendendo à demanda.

Problemas tratados por otimização linear

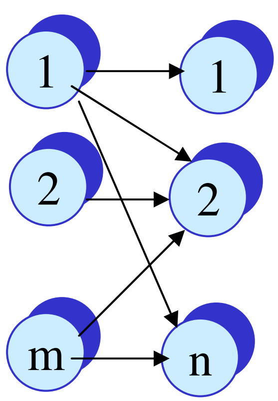
- Formulação Matemática:

m: origens (centros de produção) **n:** destinos (mercados consumidores)

variáveis de decisão $\mathbf{x_{ij}}$**:** quantidade do produto transportada da origem i para o destino j

$\mathbf{a_i}$**:** oferta do produto na origem i; **bj:** demanda do produto no destino j

cij: custo de tranportar uma unidade desse produto da origem i para o destino j



$$Minimizar \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$sa: \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \qquad i = 1,\ldots,m$$

$$sa: \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i \qquad j = 1,\ldots,n$$

$$sa: \quad x_{ij} \ge 0 \quad i = 1,\ldots m \qquad j = 1,\ldots,n$$

Problemas tratados por otimização linear

- **Exemplo:** Distribuidora de bebidas .

Centros	SP	BH	RJ	Suprimento (a_i)
Recife	4	2	5	800
Maceió	11	7	4	1000
Demanda (b_j)	500	400	900	

$$Min \quad f(x_1, x_2, ..., x_n) = 4x_{11} + 2x_{12} + 5x_{13} + 11x_{21} + 7x_{22} + 4x_{23}$$

$$sa: \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 800$$

$$sa: \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1000$$

$$x_{11} + x_{21} = 500$$

$$x_{12} + x_{22} = 400$$

$$x_{13} + x_{23} = 900$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1,2 \qquad j = 1,2,3$$

Problemas tratados por otimização linear

- Problema de planejamento de produção: mix de produção; seleção de processos; dimensionamento de lotes;

  - **Exemplo:** Problemas de mix de produção consistem em decidir quais produtos e quanto fabricar de cada produto em um determinado período. Tendo em vista a capacidade limitada da produção (máquina, recuros humanos, capital,...) e os diversos produtos que a empresa pode fabricar e vender, deseja-se determinar quais fabricar e quanto fabricar de cada produto, de modo a maximizar a margem de contribuição ao lucro da empresa.

Problemas tratados por otimização linear

- Formulação Matemática:

variáveis de decisão $\mathbf{x_j}$: quantidade a ser produzida do produto j, j=1,...,n

$\mathbf{C_i}$: capacidade disponível do recurso i, i=1,2,...,m

$\mathbf{a_{ij}}$: unidades do recurso i usadas para a produção de uma unidade do produtoj

$\mathbf{d_j}$: demanda mínima requerida do produto j.

$\mathbf{v_j}$: demanda máxima requerida do produto j

$\mathbf{l_j}$: lucro obtido com uma unidade do produto j

$$Minimizar \quad \sum_{i=1}^{n} l_j x_j$$

$$sa: \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq C_i \qquad i = 1,\ldots,m$$

$$sa: \quad d_j \leq x_j \leq v_j \qquad j = 1,\ldots,n$$

Problemas tratados por otimização linear

- **Exemplo:** Um fabricante de geladeiras deve decidir quais modelos devem ser produzidos. O departamento de marketing e vendas indica que no máximo, 1500 unidades do modelo de luxo e 6000 unidades do modelo básico devem ser vendidas no próximo mês. A empresa dispõe de 25000 homens-hora por mês. Cada modelo luxo requer 10 homens/hora e cada modelo básico requer 8 homens/hora. A capacidade de produção da linha de montagem é de 4500 geladeiras ao mês. O lucro unitário do modelo luxo é 100 e do modelo básico 50. Deseja determinar quanto produzir de cada modelo de modo a maximizar o lucro da empresa

$$
\begin{aligned}
\textit{Minimizar} \quad & 100x_1 + 50x_2 \\
sa: \quad & 10x_1 + 8x_2 \leq 25000 \\
sa: \quad & x_1 + x_2 \leq 45000 \\
sa: \quad & 0 \leq x_1 \leq 1500 \quad 0 \leq x_2 \leq 6000
\end{aligned}
$$