Lógica das Proposições – Regras de Inferência

1. **Modus Ponens (MP)**: De um condicional e seu antecedente podemos inferir a seu conseqüente.
   A, A → B ├ B
   Exemplos:
   - Se aquele animal for um gato, então aquele animal é preguiçoso.
     Aquele animal é um gato.
     Logo, aquele animal é preguiçoso.

     Sejam:
     A = aquele animal é um gato.
     B = aquele animal é preguiçoso.
     A → B, A ├ B

     Prova:

1	A → B	Proposição
2	A	Proposição
3	B	1,2 MP

   - Se Maria ou Juliana vier, então a festa será alegre e divertida.
     Maria ou Juliana virão.
     Logo, a festa será alegre e divertida.

     Sejam:
     A = Maria virá a festa.
     B = Juliana virá a festa.
     C = A festa será alegre.
     D = A festa será divertida.
     (A v B) → (C ^ D), A v B ├ C ^ D

     Prova:

1	(A v B) → (C ^ D)	Proposição
2	A v B	Proposição
3	C ^ D	1, 2 MP

   - P, P → Q, Q → R ├ R
     Prova:

1	P	Proposição
2	P → Q	Proposição
3	Q → R	Proposição
4	Q	1,2 MP
5	R	3,4 MP

2. **Eliminação da Negação (~E)**: De uma fbf ~~A, podemos inferir A.
   Exemplos:
   - Não é o caso de que o lixo não está vazio.
     Logo, o lixo está vazio.

     Sejam:
     A = O lixo está vazio.
     ~~A ├ A

     Prova:

1	~~A	Proposição
2	A	1 ~E

- ~P → ~~Q, ~~~P ├ Q

  Prova:

1	~P → ~~Q	Proposição
2	~~~P	Proposição
3	~P	2 ~E
4	~~Q	3,1 MP
5	Q	4 ~E

3. **Introdução da Conjunção (^T)**: De quaisquer fbfs A e B, podemos inferir A ^ B.
   Exemplo:
   - A sala está vazia.
     O professor está dando aula.
     Logo, a sala está vazia E o professor está dando aula.

     Sejam:
     A = A sala está vazia.
     B = O professor está dando aula.
     A, B ├ A ^ B

     Prova:

1	A	Proposição
2	B	Proposição
3	A ^ B	1,2 ^T

4. **Eliminação da Conjunção (^E)**: De uma conjunção podemos inferir qualquer uma de suas sentenças.
   Exemplos:
   - João e Marcelo jogarão futebol este Sábado.
     Logo, João jogará futebol este Sábado.

     Sejam:
     A = João jogará futebol este Sábado.
     B = Marcelo jogará futebol este Sábado
     A ^ B ├ A

     Prova:

1	A ^ B	Proposição
2	A	1 ^E

   - P → (Q ^ R), P ├ P ^ Q

     Prova:

1	P → (Q ^ R)	Proposição
2	P	Proposição
3	Q ^ R	2,1 MP
4	Q	3 ^E
5	P ^ Q	2,4 ^T

5. **Introdução da Disjunção (vT)**: De uma fbf A, podemos inferir a disjunção de A com qualquer fbf.
   Exemplos:
   - A sala está vazia.
     Logo, a sala está vazia ou o professor está dando aula.

     Sejam:
     A = A sala está vazia.
     B = O professor está dando aula.
     A ├ A v B

     Prova:

1	A	Proposição
2	A v B	1 vT

- P ├ (P v Q) ^ (P v R)

  Prova:

1	P	Proposição
2	P v Q	1 vT
3	P v R	1 vT
4	(P v Q) ^ (P v R)	2,3 ^T

6. **Eliminação da Disjunção (vE)**: De fbfs da forma A v B, A → C e B → C, podemos inferir C.
   Exemplos:
   - Eu ou meu irmão ficaremos em casa esta noite.
     Se eu ficar em casa esta noite, então a geladeira ficará vazia.
     Se meu irmão ficar em casa esta noite, então a geladeira ficará vazia.
     Logo, a geladeira ficará vazia.

     Sejam:
     A = Eu ficarei em casa esta noite.
     B = Meu irmão ficará em casa esta noite.
     C = A geladeira ficará vazia.
     A v B, A → C, B → C ├ C

     Prova:

1	A v B	Proposição
2	A → C	Proposição
3	B → C	Proposição
4	C	1,2,3 vE

7. **Introdução do Bicondicional (↔T)**: De quaisquer fbfs de formas (A → B) e (B → A), podemos inferir A ↔ B.
   Exemplo:
   - Se houver um terremoto, então a cidade será destruída, E se a cidade for destruída, então é porque houve um terremoto.
     A cidade será destruída SE E SOMENTE SE houver um terremoto.

     Sejam:
     A = Houver um terremoto.
     B = A cidade será destruída.
     (A → B) ^ (B → A) ├ B ↔ A

     Prova:

1	(A → B) ^ (B → A)	Proposição
2	A → B	1 ^E
3	B → A	1 ^E
4	B ↔ A	2,3 ↔T

8. **Eliminação do Bicondicional (↔E)**: De qualquer fbf da forma A ↔ B, podemos inferir (A → B) ou (B → A)
   Exemplo:
   - P ↔ Q ├ Q ↔ P

   Prova:

1	P ↔ Q	Proposição
2	P → Q	1 ↔E
3	Q → P	1 ↔E
4	Q ↔ P	2,3 ↔T

9. **Prova do Condicional (PC)**: Dada uma derivação de uma fbf A a partir de uma hipótese B, podemos descartar a hipótese e inferir B → A.
   Exemplo:
   - T, (T ^ C) → ~S, ~S → ~A ├ C → ~A

   Prova:

1	T	Proposição
2	(T ^ C) → ~S	Proposição
3	~S → ~A	Proposição
4	C	H (Hipótese)
5	T ^ C	1,4 ^T
6	~S	2,5 MP
7	~A	3,6 MP
8	C → ~A	4,7 PC

10. **Redução ao Absurdo (RAA)**: Dada uma derivação de uma contradição a partir de uma hipótese A, podemos descartar a hipótese e inferir ~A.
    Exemplo:
    - P → Q, ~Q ├ ~P

    Prova:

1	P → Q	Proposição
2	~Q	Proposição
3	P	Hipótese
4	Q	1,3 MP
5	Q ^ ~Q	2,4 ^T
6	~P	3,5 RAA

11. **Modus Tollens (MT)**: De fbfs da forma A → B e ~B, infere-se ~A.
    Exemplos:
    - Se meu carro estiver no estacionamento, então estou na Universidade.
      Eu não estou na Universidade.
      Logo, meu carro não está no estacionamento.

    Sejam:
    A = Meu carro está no estacionamento.
    B = Estou na Universidade.
    A → B, ~B ├ ~A

    Prova:

1	A → B	Proposição
2	~B	Proposição
3	~A	1,2 MT

    - Se um animal de estimação for um gato ou um cão, então ele será um mamífero.
      Meu animal de estimação não é um mamífero.
      Logo, ele não é um cão nem um gato.

    Sejam:
    A = Meu animal de estimação é um gato.
    B = Meu animal de estimação é um cão.
    C = Ele é uma mamífero.
    (A v B) → C, ~C ├ ~(A v B)

    Prova:

1	(A v B) → C	Proposição
2	~C	Proposição
3	~(A v B)	1,2 MT

12. **Silogismo Hipotético (SH)**: De fbfs da forma $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow C$, infere-se $A \rightarrow C$.
    Exemplos:
    - Se o pássaro está perdido, então a porta da gaiola está aberta.
      Se a porta da gaiola está aberta, então o pássaro pode retornar à gaiola.
      Logo, se o pássaro está perdido, então ele pode retornar à gaiola.

    Sejam:
    A = O pássaro está perdido.
    B = A porta da gaiola está aberta.
    C = O pássaro pode retornar à gaiola.
    $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash C$

    Prova:

1	$A \rightarrow B$	Proposição
2	$B \rightarrow C$	Proposição
3	C	1,2 SH

    - Se meu time jogar bem, então ele vencerá as suas partidas.
      Se meu time vencer as suas partidas, então ele se classificará para as finais do campeonato.
      Logo, se meu time jogar bem, então ele se classificará para as finas do campeonato.

    Sejam:
    A = Meu time jogar bem.
    B = Vencerá as suas partidas.
    C = Classificará para as finais do campeonato.
    $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash C$

    Prova:

1	$A \rightarrow B$	Proposição
2	$B \rightarrow C$	Proposição
3	C	1,2 SH

13. **Regra da Absorção (ABS)**: De uma fbf da forma $A \rightarrow B$, infere-se $A \rightarrow (A \wedge B)$

14. **Regra do Dilema Construtivo (DC)**: De fbfs da forma A v B, $A \rightarrow C$ e $B \rightarrow D$, infere-se C v D.
    Exemplos:
    - A festa será na minha casa ou na sua.
      Se fizermos a festa em minha casa, então minha casa ficará uma bagunça.
      Se fizermos a festa em sua casa, então sua casa ficará um bagunça.
      Logo, ou a minha casa ou a sua ficará uma bagunça.

    Sejam:
    A = A festa será na minha casa.
    B = A festa será na sua casa.
    C = A minha casa ficará uma bagunça.
    D = A sua casa ficará uma bagunça.
    $A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow D \vdash C \vee D$

    Prova:

1	A v B	Proposição
2	$A \rightarrow C$	Proposição
3	$B \rightarrow D$	Proposição
4	C v D	1,2,3 DC

15. **Regra da Repetição (RE)**: De qualquer fbf A, infere-se A.

16. **Regra do Silogismo Disjuntivo (SD)**: De fbfs da forma A v B e ~A, infere-se B.
Exemplo:
- Ou o cachorro está dentro de casa ou ele está no pátio.
  O cachorro não está no pátio.
  Logo, o cachorro está dentro de casa.

Sejam:
A = O cachorro está dentro de casa.
B = O cachorro está no pátio.
A v B, ~B ├ A

Prova:

1	A v B	Proposição
2	~B	Proposição
3	A	1,2 SD

Equivalência

Equivalência é um bicondicional que é um teorema.

Equivalência	Nome
~(A ^ B) = (~A v ~B)	Lei de De Morgan
~(A v B) = (~A ^ ~B)	Lei de De Morgan
A ^ B = B ^ A	Comutatividade
A v B = B v A	Comutatividade
A v (B v C) = (A v B) v C	Associatividade
A ^ (B ^ C) = (A ^ B) ^ C	Associatividade
A ^ (B v C) = (A ^ B) v (A ^ C)	Distributividade
A v (B ^ C) = (A v B) ^ (A v C)	Distributividade
A = ~(~A)	Dupla Negação
A → B = ~B → ~A	Transposição
(A ^ B) → C = A → (B → C)	Exportação
A ^ A = A	Idempotência
A v A = A	Idempotência

Exemplo Geral:
Se há um jogo de futebol na Ressacada, então viajar de avião é difícil.
Se eles chegaram no horário no aeroporto, então a viagem de avião não será difícil.
Eles, chegaram no horário.
Logo, não houve jogo na Ressacada.

Sejam:
P: Existe um jogo de futebol na Ressacada.
Q: Viajar é difícil.
R: Eles chegaram no aeroporto no horário.
P → Q, R → ~Q, R ├ ~P

Prova:

1	P → Q	Proposição
2	R → ~Q	Proposição
3	R	Proposição
4	~Q	2,3 MP
5	~P	1,4 MT