3 Sistemas de Produção

3.1 Introdução

Neste capítulo será mostrado um mecanismo genérico para modelar certos tipos de problemas. Este mecanismo, denominado *Sistema de Produção* consiste em transformar o problema em um grafo de estados. Este grafo deve possuir um estado inicial e deve-se ter uma forma de identificar um estado final quando algum for atingido. Neste caso, resolver o problema consiste simplesmente em realizar um caminhamento sobre o grafo de estados, a partir do estado inicial até encontrar um estado final.

3.2 Definição Formal de um Sistema de Produção

Para descrever um modelo formal de um problema através de um sistema de produção é necessário realizar as seguintes etapas:

a) Definir um espaço de estados que contenha todas as possíveis configurações dos objetos relevantes ao problema.

b) Especificar um ou mais estados dentro daquele espaço que descrevam situações possíveis a partir das quais o processo de resolução do problema poderá começar. Esses estados são denominados *estados iniciais.* Para simplificar, será assumida a existência de apenas um estado inicial nos sistemas de produção definidos a seguir. Mesmo assim, não se perde em generalidade, pois se mais estados existissem, poderia-se definir um novo estado que, através de uma regra aplicável somente a este estado levaria a qualquer um dos supostos estados iniciais.

c) Especificar um ou mais estados que seriam aceitáveis como soluções para o problema. Esses estados são denominados *estados meta* ou *estados finais*.

d) Especificar um conjunto de regras que descrevam as ações (operadores) disponíveis. As regras devem ser compostas por dois elementos, um *padrão* e uma *ação*. O padrão define quais estados podem sofrer a aplicação da regra e a ação define como são construídos novos estados a partir dos estados pertencentes ao padrão.

Definição: Sistema de Produção

Um *Sistema de Produção* é definido como uma tupla $SP=<R,E,e_0,F>$, onde R é um conjunto de regras, E é um conjunto de estados, $e_0 \in E$ é o estado inicial e F é o conjunto de estados finais.

As regras são constituídas de um lado esquerdo (um padrão) que determina a que estados a regra pode ser aplicada, e um lado direito, que descreve a transformação a ser aplicada aos estados que se encaixam no padrão, originando novos estados.

Definição: Regra de Produção

Uma *regra de produção* é constituída por um par $<p,f>$, onde $p:E \rightarrow \{V,F\}$ e $f:E \rightarrow E$. O elemento p é o *padrão* da regra e f constitui a *operação*.

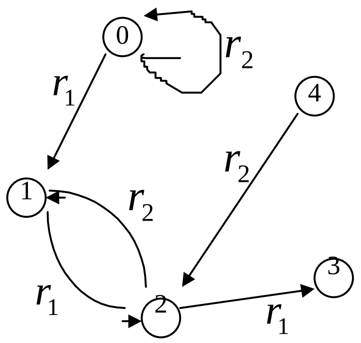
O padrão *p* consiste de um predicado que mapeia o conjunto de estados do problema em valores booleanos (verdadeiro ou falso). O padrão define como verdadeiros os estados aos quais a regra é aplicável. A aplicação da regra consiste em aplicar a operação *p* a um destes estados, gerado um novo estado.

Exemplo 1:

Considere, por exemplo, um sistema de produção constituído por:

E = {0,1,2,3,4}
e_0=0
F={3,4}
R={ r_1= <{x|x<3},x+1>
r_2= <{x|$éPar(x)$},x/2>}

A regra 1 é aplicável aos estados 0, 1 e 2, gerando respectivamente os estados 1, 2 e 3. A regra 2 é aplicável aos estados 0, 2 e 4, gerando respectivamente os estados 0, 1 e 2. O grafo completo da aplicação das regras ao espaço de estados E é mostrado a seguir:



Neste sistema de produção, o estado final 3 pode ser atingido a partir do estado inicial 0 com três aplicações da regra r_1, ou seja, $r_1(r_1(r_1(0)))$=3. Outra de atingir o estado 3 é aplicando r_2 um número qualquer de vezes sobre o estado 0 e então aplicando r_1 três vezes. por exemplo: $r_1(r_1(r_1(r_2(r_2(0)))))$=3. Outra forma, ainda, seria através do ciclo entre os estados 1 e 2 pela aplicação intercalada das duas regras e, então, finalizando com r_1 Evidentemente, para encontrar um estado final em um espaço de problemas, freqüentemente deseja-se o caminho mais curto, assim, não seria desejável repetir um estado mais de uma vez nesta busca. Já o estado 4 é inalcançável neste sistema de regras.

Exemplo 2:

O seguinte exemplo mostra um sistema de produção com um conjunto infinito de estados, compostos por pares de números naturais:

$E = \mathrm{N}\times\mathrm{N}$
e_0=(0,0)
F={(3,2), (4,9)}
R={r_1=<{(x,y)|y=x^2},(x+y,0)>}

Alguns estados aos quais esta regra é aplicável são:

$(0,0) \xrightarrow{r_1} (0,0)$

$(1,1) \xrightarrow{r_1} (2,0)$

$(2,4) \xrightarrow{r_1} (6,0)$

$(3,9) \xrightarrow{r_1} (12,0)$

etc...

Sendo r_1 a única regra deste sistema, fica claro que nenhum dos estados finais é atingível, a partir do estado inicial, porque a aplicação da regra sempre leva a estados onde o segundo elemento do par é igual a zero.

Para efeitos de simplificação de notação, a seguinte abreviação será adotada daqui por diante para a escrita das regras:

$<\{x|p(x)\},f(x)>$ por $(x|p(x))\rightarrow f(x)$

Por exemplo, $<\{(x,y)|y=x^2\},(x+y,0)>$ passa a ser escrita como: $(x,y|y=x^2)\rightarrow(x+y,0)$.

3.3 Modelagem de Problemas por Sistemas de Produção

Nesta seção são apresentados vários exemplos de aplicação da modelagem por sistemas de produção. Os exemplos apresentados podem ser considerados clássicos da área de resolução de problemas e aparecem em diversas obras da bibliografia da área.

3.3.1 Problema dos Dois Baldes de Água

Enunciado do problema: *Você recebe dois baldes de água, um de quatro litros e outro de três litros. Nenhum deles possui qualquer marcação de medida. Há uma torneira que pode ser utilizada para encher os baldes de água. Como colocar exatamente dois litros d'água dentro do balde de quatro litros?* **[RIC 94]**

O espaço de estados para este problema pode ser modelado como o conjunto de pares ordenados de números naturais (x,y) tal que $x = 0, 1, 2, 3$ ou 4 e $y = 0, 1, 2$ ou 3, onde x representa a quantidade de água no balde de 4 litros, e y representa a quantidade de água no balde de 3 litros.

O estado inicial do problema é o estado no qual ambos os baldes estão vazios: (0,0), e o conjunto de estados finais é constituído por todos os estados onde a quantidade de água no primeiro balde é 2, ou seja: (2,n), onde n = 0, 1, 2 ou 3.

Um possível conjunto de regras para este problema seria:

r_1	$(x,y\|x<4)\rightarrow(4,y)$	Encher o balde de 4 litros
r_2	$(x,y\|y<3)\rightarrow(x,3)$	Encher o balde de 3 litros
r_3	$(x,y\|x>0)\rightarrow(0,y)$	Esvaziar o balde de 4 litros no chão
r_4	$(x,y\|y>0)\rightarrow(x,0)$	Esvaziar o balde de 3 litros no chão
r_5	$(x,y\|x+y>4)\rightarrow(4,y-(4-x))$	Despejar água do balde de 3 litros dentro do balde de 4 litros até que este esteja cheio

r_6	$(x,y \mid x+y>3) \rightarrow (x-(3-y),3)$	Despejar água do balde de 4 litros dentro do balde de 3 litros até que este esteja cheio
r_7	$(x,y \mid x+y \leq 4$ e $y>0) \rightarrow (x+y,0)$	Despejar toda a água do balde de 3 litros dentro do balde de 4 litros
r_8	$(x,y \mid x+y \leq 3$ e $x>0) \rightarrow (0,x+y)$	Despejar toda a água do balde de 4 litros dentro do balde de três litros

Uma solução possível para o problema seria aplicar em seqüência as regras r_2, r_9, r_2, r_7, r_5 e r_9. A situação dos baldes à cada aplicação é mostrada na tabela a seguir:

Litros no balde de 4 litros	Litros no balde de 3 litros	Regra aplicada
0	0	2
0	3	7
3	0	2
3	3	5
4	2	3
0	2	7
2	0	

A solução apresentada acima não é a única possível. Além disso, não foi mostrado como a solução foi encontrada. Este é exatamente o ponto onde entram os algoritmos de busca no espaço de estados. A modelagem de um problema como um sistema de produção consiste apenas em definir o espaço de estados e as regras. Este processo, dificilmente poderia ser feito automaticamente. Como na programação, trata-se de um processo de modelagem de uma realidade perceptível utilizando uma ferramenta formal definida. Mas, uma vez estabelecido o modelo, o processo pode ser liberado para a máquina, e esta pode encontrar sozinha a solução. Mantendo a analogia com o processo de programação, a ativação dos algoritmos de busca consistiria em disparar o programa, que, seguindo as instruções passo a passo, acaba encontrando um resultado.

3.3.2 Problema das Torres de Hanói

Enunciado do problema: *Em algum lugar perto e Hanói há um mosteiro onde os monges dedicam suas vidas a uma tarefa muito importante. No pátio há três postes bem altos. Em cima deles há 64 discos, cada um com um buraco no centro e cada um com um raio diferente. Quando o mosteiro foi criado, todos os discos estavam em um só poste, e cada disco estava em cima daquele com tamanho imediatamente maior do que o seu. A tarefa dos monges é mover todos estes discos para um dos outros postes. Apenas um disco pode ser deslocado de cada vez, e todos os outros discos precisam estar em um dos postes. Além disso, em nenhum momento durante o processo um disco pode ser colocado sobre um disco menor. Qual a maneira mais rápida para os monges concluírem sua missão? (Mesmo com a melhor solução para este problema, os monges precisarão de muito tempo para concluí-la. Isto é uma felicidade, já que a lenda diz que o mundo acabará quando eles terminarem.)* **[RIC 94]**

A modelagem deste problema envolve um espaço de estados composto por configurações possíveis para os três postes. Como cada poste pode conter vários discos, optou-se por representar os estados do problema como uma tripla onde cada elemento é constituído por uma lista de números naturais de 1 a 64. Cada número natural representa um disco cuja ordem, em relação ao tamanho é dada pelo próprio número, ou seja, 1 para o menor e 64 para o maior disco. Assim, o espaço de estados seria definido como:

$E=\{(l_1,l_2,l_3)|l_1\in \mathbb{N}^*,\ l_2\in \mathbb{N}^* \text{ e } l_3\in \mathbb{N}^*\}$

Será usada aqui uma notação para listas semelhante à utilizada na linguagem PROLOG. Uma lista será representada por uma seqüência de itens entre colchetes, como por exemplo: [1,2,3,4]. A lista vazia é representada por []. Quando interessar saber apenas qual é o primeiro elemento da lista, pode-se escrever, por exemplo, $[1|x]$, o que indica uma lista iniciada pelo elemento 1 seguido de uma lista de outros elementos, que são denotados por x. Esta notação pode ser estendida para indicar os n primeiros elementos de uma lista. Por exemplo: $[1,2,3|x]$ denota uma lista iniciada pelos elementos 1, 2 e 3 e seguida de outros elementos denotados por x.

Considerando que o primeiro poste poderia conter os discos no estado inicial, este estado seria representado por:

$e_0=([1,2,3,...,64],[],[])$

Os estados finais seriam dois:

$F=\{([],[1,2,3,...,64],[]),([],[],[1,2,3,...,64])$

As regras de movimentação são todas variantes do mesmo padrão: dada uma configuração dos discos, pode-se mover um disco do topo de uma pilha para uma das outras duas pilhas somente se o disco no topo da pilha origem for menor do que o disco no topo da pilha destino. Por exemplo, para mover o disco da primeira para a segunda pilha, a regra seria a seguinte:

$r_{1\to 2}=([a|x],[b|y],z|a<b)\to(x,[a,b|y],z)$

onde a e b são naturais representando os discos no topo das duas primeiras pilhas e x, y e z são listas de naturais representando os demais discos nas três pilhas.

As demais regras são $r_{1\to 3}$, $r_{2\to 1}$, $r_{2\to 3}$, $r_{3\to 1}$ e $r_{3\to 2}$.

Exercício: Defina as regras que faltam para completar o sistema de produção para o problema das torres de Hanói.

É preciso deixar claro que as regras não mostram, a princípio como resolver o problema, mas elas determinam o formato do espaço de estados dentro do qual a solução pode ser buscada. A busca dessa solução é tarefa do método de busca, que pode ser mais ou menos eficiente dependendo de sua definição. Alguns algoritmos de busca serão vistos mais adiante neste capítulo.

3.3.3 Canibais e Missionários

Enunciado do problema: *Três canibais e três missionários estão viajando juntos e eles precisam atravessar um rio. Todos os seis devem passar para o outro lado. Entretanto, o único meio de atravessar o rio é uma canoa que só comporta, no máximo, duas pessoas. Aí está outra dificuldade: em nenhum momento, em nenhuma das margens o número de canibais pode ser maior do que o número de missionários, porque isso poderia ser perigoso para os missionários. Como eles podem fazer para atravessar o rio?* **[CHA 77]**

A modelagem deste problema consiste em verificar a cada movimento de missionários ou canibais se a regra de que não podem haver mais canibais do que missionários numa margem é cumprida. Pode-se representar os estados do problema como uma quíntupla de naturais sendo os quatro primeiros entre 0 e 3 e o último entre 0 e 1. Nesta quíntupla o primeiro valor representa o número de missionários na margem original, o segundo valor representa o número de canibais na margem original, o terceiro valor representa o número de missionários na margem oposta e o quarto valor representa o número de canibais na margem oposta. O último valor assume o valor 0 se o barco esta na margem original e o valor 1 se o barco está na margem oposta. O espaço de estados será então:

$$E=\{(m_1,c_1,m_2,c_2,b)|m_1\leq 3,\ c_1\leq 3,\ m_2\leq 3,\ c_2\leq 3,\ b\leq 1,\ m_1+m_2=3 \text{ e } c_1+c_2=3\}$$

O estado inicial é (3,3,0,0,0) e o único estado final é (0,0,3,3,1).

As regras são todas de movimentação de no máximo duas pessoas de uma margem à outra do rio. Assim, pode-se movimentar dois canibais, dois missionários, um canibal e um missionário, apenas um canibal ou apenas um missionário, tanto da margem original para a margem oposta quanto vice-versa. Tem-se, assim, 10 regras possíveis, das quais uma é mostrada a seguir.

Para transportar dois missionários da margem original para a margem oposta:

$$r_{\underrightarrow{MM}} = (m_1, c_1, m_2, c_2, 0 | (m_1 \geq 2) \text{ e } (m_1 - 2 \geq c_1 \text{ ou } m_1 - 2 = 0) \text{ e } (m_2 + 2 \geq c_2)) \rightarrow (m_1 - 2, c_1, m_2 + 2, c_2)$$

As restrições do problema estão expressas nas condições das regras: $m_1\geq 2$ exige que existam pelo menos dois missionários na margem original para que possam ser transportados. (m_1-2$\geq c_1$ ou m_1-2=0) exige que o número de missionários que permanecerão na margem original após o transporte seja maior ou igual ao número de canibais na mesma margem ou igual a zero. Finalmente, (m_2+2$\geq c_2$) exige que o número de missionários na margem oposta após a travessia seja maior ou igual ao número de canibais nesta margem.

O conjunto completo de regras é o seguinte:

$$r_{\underrightarrow{MM}} = (m_1, c_1, m_2, c_2, 0 | (m_1 \geq 2) \text{ e } (m_1 - 2 \geq c_1 \text{ ou } m_1 - 2 = 0) \text{ e } (m_2 + 2 \geq c_2)) \rightarrow (m_1 - 2, c_1, m_2 + 2, c_2, 1)$$

$$r_{\underleftarrow{MM}} = (m_1, c_1, m_2, c_2, 1 | (m_2 \geq 2) \text{ e } (m_1 + 2 \geq c_1) \text{ e } (m_2 - 2 \geq c_2 \text{ ou } m_2 - 2 = 0)) \rightarrow (m_1 + 2, c_1, m_2 - 2, c_2, 0)$$

$$r_{\underrightarrow{CC}} = (m_1, c_1, m_2, c_2, 0 | (c_1 \geq 2) \text{ e } (m_2 \geq c_2 + 2 \text{ ou } m_2 = 0)) \rightarrow (m_1, c_1 - 2, m_2, c_2 + 2, 1)$$

$$r_{\underleftarrow{CC}} = (m_1, c_1, m_2, c_2, 1 | (c_2 \geq 2) \text{ e } (m_1 \geq c_1 + 2 \text{ ou } m_1 = 0)) \rightarrow (m_1, c_1 + 2, m_2, c_2 - 2, 0)$$

$$r_{\underrightarrow{MC}} = (m_1, c_1, m_2, c_2, 0 | (m_1 \geq 1) \text{ e } (c_1 \geq 1) \text{ e } (m_2 + 1 \geq c_2 + 1)) \rightarrow (m_1 - 1, c_1 - 1, m_2 + 1, c_2 + 1, 1)$$

$$r_{\underleftarrow{MC}} = (m_1, c_1, m_2, c_2, 1 | (m_2 \geq 1) \text{ e } (c_2 \geq 1) \text{ e } (m_1 + 1 \geq c_1 + 1)) \rightarrow (m_1 + 1, c_1 + 1, m_2 - 1, c_2 - 1, 0)$$

$r_{\xrightarrow{M}} = (m_1, c_1, m_2, c_2, 0 | (m_1 \geq 1) \text{ e } (m_1 - 1 \geq c_1 \text{ ou } m_1 - 1 = 0) \text{ e } (m_2 + 1 \geq c_2)) \rightarrow$
$(m_1 - 1, c_1, m_2 + 1, c_2, 1)$

$r_{\xleftarrow{M}} = (m_1, c_1, m_2, c_2, 1 | (m_2 \geq 1) \text{ e } (m_1 + 1 \geq c_1) \text{ e } (m_2 - 1 \geq c_2 \text{ ou } m_2 - 1 = 0)) \rightarrow$
$(m_1 + 1, c_1, m_2 - 1, c_2, 0)$

$r_{\xrightarrow{C}} = (m_1, c_1, m_2, c_2, 0 | (c_1 \geq 1) \text{ e } (m_2 \geq c_2 + 1 \text{ ou } m_2 = 0)) \rightarrow$
$(m_1, c_1 - 1, m_2, c_2 + 1, 1)$

$r_{\xleftarrow{C}} = (m_1, c_1, m_2, c_2, 1 | (c_2 \geq 1) \text{ e } (m_1 \geq c_1 + 1 \text{ ou } m_1 = 0)) \rightarrow$
$(m_1, c_1 + 1, m_2, c_2 - 1, 0)$

3.3.4 As três jarras

Enunciado do problema: *Há três jarras de vinho com capacidade para oito, cinco e três litros. A jarra maior está cheia de vinho e as outras estão completamente vazias. Queremos dividir o vinho em porções iguais usando estas jarras (que não possuem graduação) e apenas elas como meio de divisão do vinho.* **[CHA 77]**

O espaço de estados desse problema consiste em triplas de naturais, onde o primeiro representa o número de litros de vinho na jarra com capacidade para 8 litros, o segundo número representa o número de litros na jarra de 5 litros e o último número representa a quantidade de vinho na jarra de três litros:

$E = \{(x,y,z) | x \leq 8, y \leq 5, z \leq 3 \text{ e } x+y+z=8\}$

Portanto, o estado inicial será (8,0,0) e o único estado final será (4,4,0).

As regras, novamente, são variantes do mesmo padrão, como no problema das torres de Hanói. A cada momento pode-se despejar o vinho contido em uma das jarras dentro de uma das doutras duas jarras, desde que a jarra original contenha uma quantidade de vinho maior do que 0 e que a quantidade de vinho despejada seja suficiente para esvaziar a jarra original ou encher a jarra que recebe o vinho. Transvasos de quantidades intermediárias de vinho também são possíveis, mas como nestes casos a quantidade derramada é indeterminada, este tipo de regra não ajudaria muito para encontrar a solução do problema.

Para despejar o conteúdo da primeira jarra na segunda até esvazia-la, a regra deve verificar se a quantidade total de vinho contida em ambas as jarras cabe na segunda jarra e se a primeira jarra contém algum vinho. Não é necessário verificar se a segunda jarra já está cheia, porque neste caso, se houver algum vinho na primeira jarra, a soma das duas quantidades certamente será maior do que a capacidade da segunda jarra, e a regra não poderá ser aplicada. A regra é a seguinte:

$r_{\text{esvaziar 8 em 5}} = (x,y,z | x+y \leq 5 \text{ e } x>0) \rightarrow (0, x+y, z)$

Para despejar o conteúdo da primeira jarra na segunda até que a segunda esteja cheia, é preciso certificar se a quantidade de vinho nas duas jarras é suficiente para completar a segunda jarra e se existe algum vinho na primeira jarra:

$r_{\text{encher 5 com 8}} = (x,y,z | x+y>5) \rightarrow (x-(5-y), 5, z)$

Exercício: Complete este problema com as regras que faltam.

Exercício: Modele o **Problema dos Três Maridos Ciumentos**

Enunciado do problema: *Três maridos e suas esposas devem ir à cidade em um Corvette no qual cabem apenas duas pessoas. Como eles poderiam fazer para ir de forma que nenhuma esposa ficasse junto ao marido de outra sem que um de seus respectivos estivesse por perto?* **[CHA 77]**

Exercício: Modele o **Problema dos Três Ladrões**

Enunciado do problema: *Uma quadrilha de três ladrões assalta um banco e foge com uma mala de dinheiro para um aeroporto onde um avião pronto para decolar está a espera. O esconderijo é seguro, mas a fuga é difícil, porque o avião só comporta 170kg; só um dos ladrões sabe pilotar e ele pesa 60kg; o segundo que é guarda-costas do chefe pesa 100kg e o chefe pesa 70kg. O chefe teme que o piloto fuja com o dinheiro (peso da mala 40kg) se tiver oportunidade; o piloto tem a mesma preocupação em relação ao chefe. Apenas o guarda-costas merece a confiança de ambos. A quadrilha, no entanto, já elaborou um plano de fuga, capaz de satisfazer a todos. Qual é este plano?* **[NET 79]**