Lógica dos Predicados

- A Lógica das Proposições tem um poder de representação limitado.
- Na Lógica das Proposições se utiliza apenas sentenças completas, isto é, as proposições para representar o conhecimento sobre o Mundo.
- A Lógica dos Predicados, ou Cálculo dos Predicados, é uma extensão da Lógica das Proposições em que se consideram variáveis e quantificadores sobre as variáveis.
- A Lógica dos Predicados se preocupa em introduzir noções lógicas para expressar qualquer conjunto de fatos através de Classes de Atributos e de Quantificados.
- CLASSE DE ATRIBUTOS: São representados pelos substantivos comuns, locuções nominais, adjetivos, locuções adjetivas, verbos e locuções verbais.
    - Exemplos:
    - Sócrates é um homem S é H
    - Todo Homem é Mortal. Todo H é M.
    - Logo, Sócrates é Mortal. S é M.
    - S, H e M não são sentenças, como na Lógica das Proposições, mas Classes de Atributos.
- QUANTIFICADORES: São operadores lógicos, mas em vez de indicarem relações entre sentenças, eles expressam relações entre conjuntos designados pelas classes de atributos, isto é, expressam propriedades de coleções de objetos, evitando que tenhamos de enumerar cada objeto individualmente como na Lógica das Proposições.
    - A Lógica dos Predicados contém dois quantificadores, chamados UNIVERSAL e EXISTENCIAL.
    - QUANTIFICADOR UNIVERSAL ($\forall$) Este tipo de quantificador é formado pelas expressões “para todo”, “todo”.
        - Exemplo:
        - Todo gato é mamífero. Ou seja,
        - Qualquer que seja x, se x for um gato, então x é mamífero. Ou ainda,
        - Para todo x, se x for um gato, então x é mamífero.
    - QUANTIFICADOR EXISTENCIAL ($\exists$) Este tipo de quantificador é formado pelas expressões “algum”, “pelo menos um”.
        - Exemplo:
        - Existe algum político honesto. Ou seja,
        - Para pelo menos um x, x é um político e x é honesto. Ou ainda,
        - $\exists$x Político(x) ^ Honesto(x)

Quantificadores Aninhados

- Eventualmente desejamos expressar sentenças mais complexas com múltiplos quantificadores.
- Exemplos:
    - Para todo x e todo y, se x é pai de y, então y é filho de x. $\forall$x,y Pai(x, y) $\rightarrow$ Filho(y, x)
    - Bob ama Cathy. Ama(Bob, Cathy)
    - Todo mundo ama Cathy. $\forall$x Ama(x, Cathy)
    - Todo mundo ama alguém. $\forall$x $\exists$y Ama(x, y)
    - Existe alguém que ama a todos. $\exists$x $\forall$y Ama(x, y)
    - Existe alguém que é amada por todos. $\exists$y $\forall$x Ama(x, y)
    - A ordem dos quantificadores é importante.

Igualdade ou Identidade

- É um símbolo que se adiciona ao Cálculo de Predicados com o propósito de expressar o fato de dois termos se referirem ao mesmo objeto, ou seja, “é idêntico a” ou “é a mesma coisa que”.
- Exemplos:
    - O Pai de João é Henrique. Pai_de(João) = Henrique
    - O Pai de João é também Avô de Pedro. Pai_de(João) = Avô_de(Pedro)

Equivalência de Quantificadores

- Os dois quantificadores estão intimamente relacionados entre si através da negação.
- Exemplo:
  - Ninguém gosta de pagar impostos.
  - $\forall$x ~GostarPagar(x, Impostos) = ~$\exists$x GostarPagar(x, Impostos)
- Como $\forall$ é na verdade uma conjunção sobre o universo de objetos e o $\exists$ é uma disjunção, não é surpreendente que eles obedeçam as Lei de DeMorgan.

$\forall$x ~P = ~$\exists$x P	~P ^ ~Q = ~(P v Q)
~$\forall$x P = $\exists$x ~P	~(P ^ Q) = ~P v ~Q
$\forall$x P = ~$\exists$x ~P	P ^ Q = ~(~P v ~Q)
$\exists$x P = ~$\forall$x ~P	P v Q = ~(~P ^ ~Q)

Prova Automática de Teoremas

- A capacidade de se demostrar teoremas é uma das partes integrantes da inteligência humana.
- Este tipo de prova foi pesquisada e desenvolvida a partir da segunda metade dos anos 60.
- A partir da introdução, por Robinson e Smullyan, em 1960, de procedimentos eficientes para demonstração automática de teoremas por computador, a lógica passou a ser estudada também como método computacional para a solução de problemas.
- Umas das áreas que mais faz uso desta técnica é a dos Sistemas Especialistas.
- O objetivo principal da Prova Automática de Teoremas é provar que uma fórmula (teorema) é conseqüência lógica de outras fórmulas.
- Os métodos adotados normalmente não utilizam a prova direta (através de regras de inferência), mas sim a PROVA POR REFUTAÇÃO (prova indireta), demostrando que a negação da fórmula leva a inconsistências.
- Se a negação de um teorema é falsa, então ele será verdadeiro.
- Os procedimentos de prova exploram o fato de expressões lógicas (fórmulas) poderem ser colocados em formas canônicas, isto é, apenas com os operadores “e”, “ou” e “não”.
- O método da prova por refutação aplicado à lógica de primeira ordem é muito conveniente e com seu emprego não haverá perda de generalidade, porém, exige-se que as fórmulas estejam na forma de cláusulas.
- A TEORIA DA RESOLUÇÃO, proposta por Robinson em 1965 a partir dos trabalhos de Herbrand, Davis e Putman, parte da transformação da fórmula a ser provada para a forma canônica conhecida como forma clausal.
- O método é baseado em uma regra de inferência única, chamada REGRA DA RESOLUÇÃO, e utiliza intensivamente um algoritmo de casamento de padrões chamado ALGORITMO DE UNIFICAÇÃO.
- O fato de ser possível associar uma semântica operacional a um procedimento de prova automática de teoremas permitiu a definição de uma linguagem de programação baseada em lógica, a linguagem PROLOG.
- Ainda hoje a área de prova automática de teoremas permanece bastante ativa, sendo objeto de diversas conferências internacionais.
- Definições:
  - PROVA: É a demonstração de que um teorema (ou fórmula) é verdadeiro.
  - FORMA NORMAL CONJUNTIVA: É quando uma fórmula F for composta de uma conjunção de outras fórmulas (F1 ^ F2 ^ .... ^ Fn).
  - FORMA NORMAL DISJUNTIVA: É quando uma fórmula F for composta de uma disjunção de outras fórmulas (F1 v F2 v .... v Fn).
  - FORMA NORMAL PRENEX: É quando numa fórmula F, na lógica de primeira ordem, todos os quantificadores existenciais prefixam a fórmula.

Resolução

- Seria útil, do ponto de vista computacional, que tivéssemos um procedimento de prova que realizasse, em uma única operação, a variedade de processos envolvidos no raciocínio, com declarações da lógica dos predicados.
- Este procedimento é a RESOLUÇÃO, que ganha sua eficiência por operar em declarações que foram convertidas à forma clausal, como mostrado anteriormente.
- A Resolução produz provas por REFUTAÇÃO, ou seja, para provar uma declaração (mostrar que ela é válida), a resolução tenta demonstrar que a negação da declaração produz uma contradição com as declarações conhecidas (não é possível de ser satisfeita).
- A BASE DA RESOLUÇÃO
  - É um processo interativo onde, em cada passo, duas cláusulas, denominadas cláusulas paternas, são comparadas (resolvidas), resultando em uma nova cláusula, dela inferida.
  - A nova cláusula representa maneiras em que as duas cláusulas paternas interagem entre si.
  - Exemplo:
    - Inverno v Verão
    - ~Inverno v Frio
    - As duas cláusulas deverão ser verdadeiras (embora pareçam independentes, são realmente conjuntas).
    - Agora, observamos que apenas um entre Inverno e ~Inverno será verdadeiro, em qualquer ponto. Se Inverno for verdadeiro, então Frio também deverá ser, para garantir a verdade da Segunda cláusula. Se ~Inverno for verdadeiro, então também Verão deverá ser, para garantir a verdade da primeira cláusula.
    - Assim, dessas duas cláusulas, podemos deduzir que
    - Verão v Frio
    - Esta é a dedução feita pelo procedimento de resolução.
  - A resolução opera tirando suas cláusulas que contenham cada uma, o mesmo literal, neste exemplo Inverno.
  - O literal deverá ocorrer na forma positiva numa cláusula e na forma negativa na outra.
  - O resolvente é obtido combinando-se todos os literais das duas cláusulas paternas, exceto aqueles que se cancelem.
  - Se a cláusula produzida for vazia, então foi encontrada uma CONTRADIÇÃO, o que valida a fórmula.

Resolução na Lógica dos Predicados

- Na Lógica das Proposições é fácil determinar que dois literais não possam ser verdadeiros ao mesmo tempo. (Simplesmente procure L e ~L)
- Na Lógica dos Predicados este processo de casamento (matching) é mais complicado. Por exemplo, Homem(Henry) e ~Homem(Henry) é uma contradição, enquanto que Homem(Henry) e ~Homem(Spot) não o é.
- Assim, para determinar contradições, precisamos de um procedimento de matching que compare dois literais e descubra se existe um conjunto de substituições que os torne idênticos.
- O ALGORITMO DE UNIFICAÇÃO é um procedimento recursivo direto que faz exatamente isto.
- Duas fórmulas-atômicas são contraditórias se uma delas puder ser unificada com o não da outra. Assim, por exemplo, Homem(x) e ~Homem(Spot) podem ser unificados.
- Isto corresponde à intuição que diz que não pode ser verdadeiro para todos os x, que Homem(x) se houver conhecimento de haver algum x, digamos Spot, para o qual Homem(x) é falso.
- Na lógica de predicados utilizaremos o algoritmo de unificação para localizar pares de fórmulas-atômicas que se cancelem.
- Resolver apenas pares de cláusulas que contenham literais complementares, pois somente essas resoluções produzem cláusulas novas mais difíceis de satisfazer que seus pais.
- Eliminar cláusulas do tipo tautologia e cláusulas que estejam incluídas em outras cláusulas.
- Sempre que possível, resolver com uma das cláusulas que estamos tentando refutar ou com uma cláusula gerada por uma resolução com tal cláusula.
- Sempre que possível, dar preferência a cláusulas com um único literal.