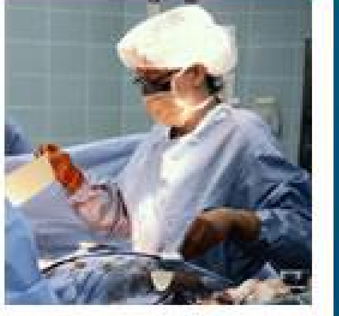
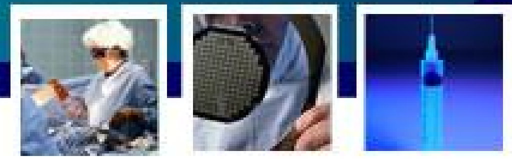
Bioestatística
Aula 4
Probabilidade



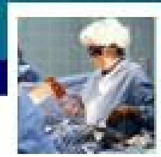
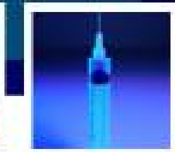
Prof. Tiago A. E. Ferreira

Teorias Irmãs



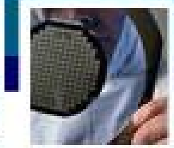
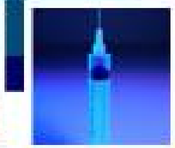
- As teorias da Probabilidade, Conjuntos e Lógica Booleana são teorias irmãs.
  - Ao provarmos algum resultado em uma, existirá o equivalente nas outras duas!
  - Ex.:
    - Probabilidade: Leis Multiplicativas e Aditivas
    - Conjuntos: operação de Intersecção e união
    - Lógica: Funções ñEò e ñOUò

Probabilidade

- De forma coloquial, é possível conceituar a Probabilidade com:
  - A possibilidade de um determinado fato ou evento vir a ocorrer, avaliada numericamente e em termos percentuais
    - Desta forma, a probabilidade relaciona-se com eventos futuros, ou seja, relaciona-se com a incerteza.
      - Logo, a probabilidade também está relacionada com a medida da incerteza em relação a algum evento!

Mensuração da Probabilidade

Å Existem basicamente duas formas de avaliar uma probabilidade

ï Pela observação e conhecimento completo dos fatos que influenciam um evento

Å Probabilidade *a priori*

ï Pela observação do comportamento passado do evento e das circunstâncias nas quais ocorreu

Å Probabilidade *a posteriori*, estimada a partir da frequência relativa

Calculando a Probabilidade

- A probabilidade *a priori* de um acontecimento ñAòvir a acontecer:

$$P(A) = \frac{número\ de\ possibilidades\ favoráveis\ a\ "A"}{número\ total\ de\ possibilidades} = \frac{|A|}{|U|}$$

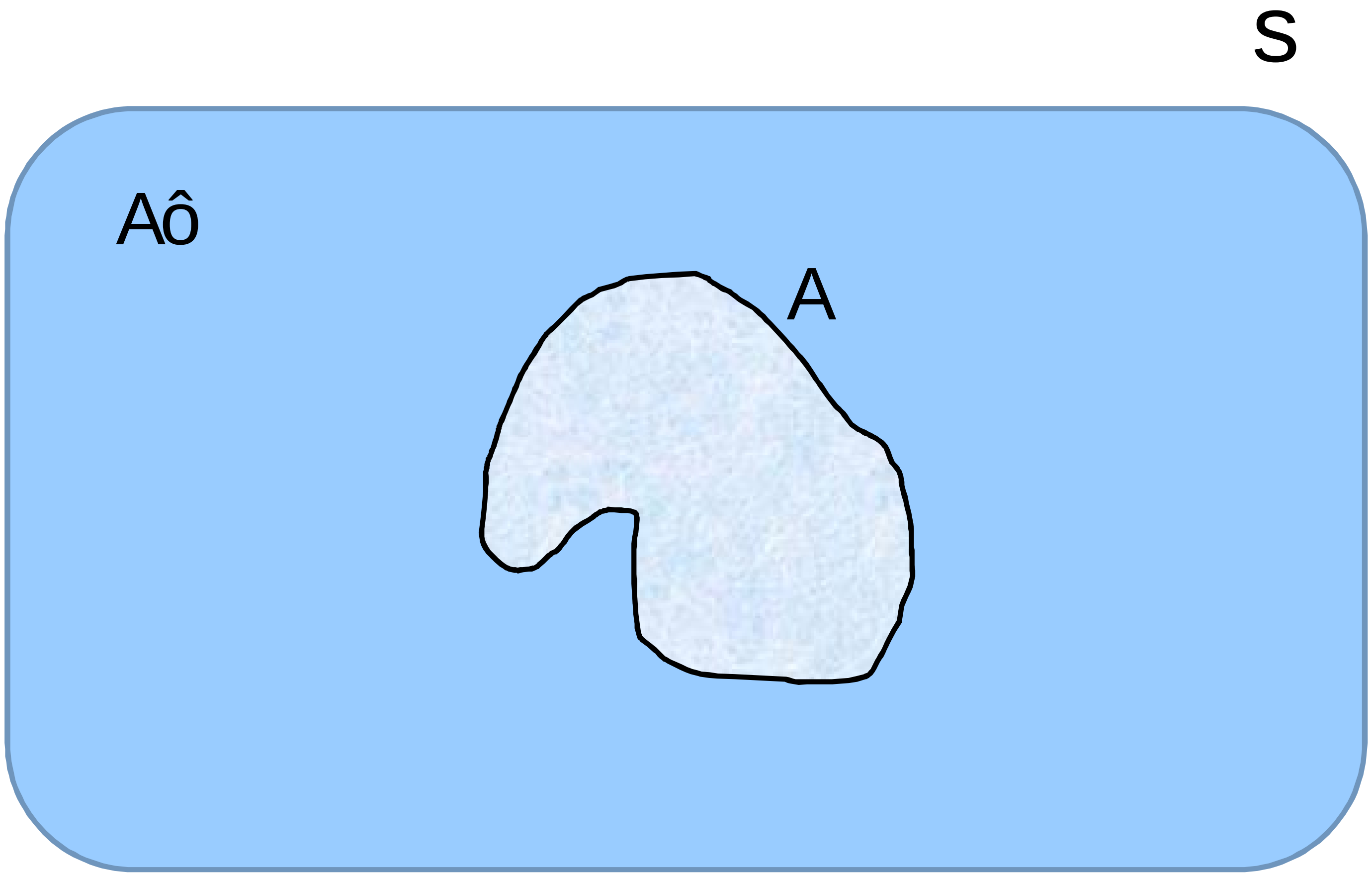
  - Onde,
    - |A| é a cardinalidade do subconjunto A
    - |U| é a cardinalidade do conjunto Universo

Calculando a Probabilidade



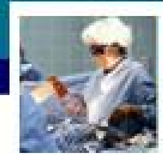
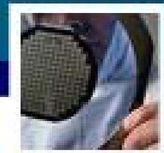
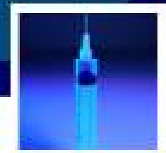
- O Conjunto Universo (U) representa todo o universo para um dado fenômeno de interesse
  - Portanto, de forma prática, a determinação do conjunto U nem sempre é viável.
  - Desta forma, em várias ocasiões práticas o conjunto Universo é na realidade o espaço amostral, denominado por *S.*

Diagrama de Venn



Onde Aôsignifica o complementar de A

Probabilidade - Propriedades

- Como A está sempre contido em S, então:

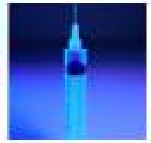
$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Assim, denotando a probabilidade por *p*, temos que $0 \leq p \leq 1$, ou $0\% \leq p \leq 100\%$
- Note ainda que,

$$A + A' = S \text{ ou } A \cup A' = S$$

Probabilidade - Propriedades





- De forma análoga,

$$P(A') = \frac{|A'|}{|S|}$$

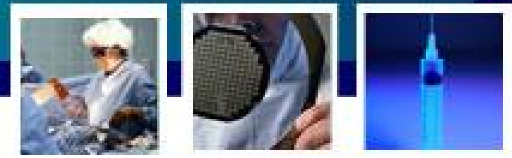
- Logo,

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A') = \frac{|A|}{|S|} + \frac{|A'|}{|S|} =$$

$$= \frac{|A \cup A'|}{|S|} = \frac{|S|}{|S|} = 1$$

- E assim, $P(A) = 1 - P(A')$ *ou* $P(A') = 1 - P(A)$

Probabilidade - Propriedades

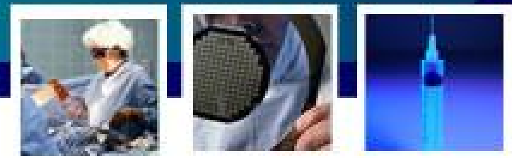


Å E portanto,

$$P\left(A \cup A'\right)' = 0$$

ï Ou seja, a probabilidade de **NÃO** ocorrer A ou Aôé nula!

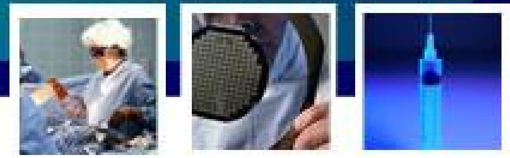
Probabilidade *a Posteriori*



- É possível definir a probabilidade *a posteriori* como,

$$P(A) = \frac{\textit{número de vezes que "A" ocorreu}}{\textit{número total de observações}} = \frac{|A|}{n}$$

Exemplo



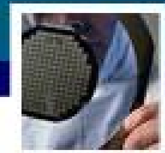
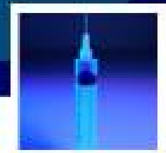
- Suponha o lançamento de uma moeda.
  - O conjunto universo, ou espaço amostral, é
    - S={Cara, Coroa}
    - Assim, dado o evento A = resultado “Cara”, constituído de um único elemento.
    - Logo, a Probabilidade *a Priori* de se obter Cara será,

$$P(A) = \frac{1}{2} = 0,5 \; ou \; 50\%$$

- E a Probabilidade *a Priori* de se obter Coroa será

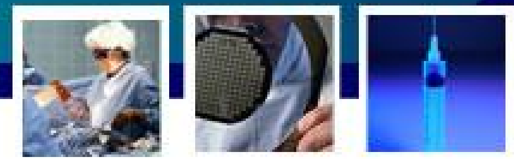
$$P(A') = 1 - P(A) = 0,5 \; ou \; 50\%$$

Exemplo

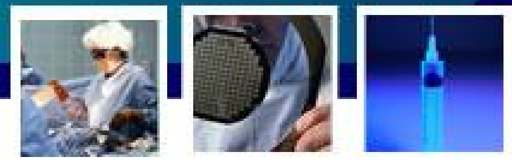
- Para o mesmo exemplo, para calcularmos a probabilidade *a posteriori* implica em ter realizado um número **n** de lançamentos
  - Assim, se **n=1**, a probabilidade de ter saído cara (ou coroa) será 0 ou 1!
    - Erro de estimativa muito grande!
  - Para tentar diminuir este erro, deve-se aumentar o número de experimentos.
    - Suponha **n=10**, onde foram encontradas 6 caras.
    - Logo, *P(A) = 6/10=0,6 ou 60%*

Lei dos Grandes Números



- Desta forma, a Probabilidade *a Posteriori* tenderá a ser igual a Probabilidade *a Priori* quando a quantidade de experimentos tender para infinito!
  - Desta forma, quanto maior o número de experiências realizadas, maior a chance da estimativa da Probabilidade *a Posteriori* ser verdadeira!

Lei Mutliplicativa



Å Dado que um evento A_i tenha probabilidade $P(A_i)$ de ocorrer ($i=1,2,3,...$) e que todos os eventos A_i sejam independentes, então

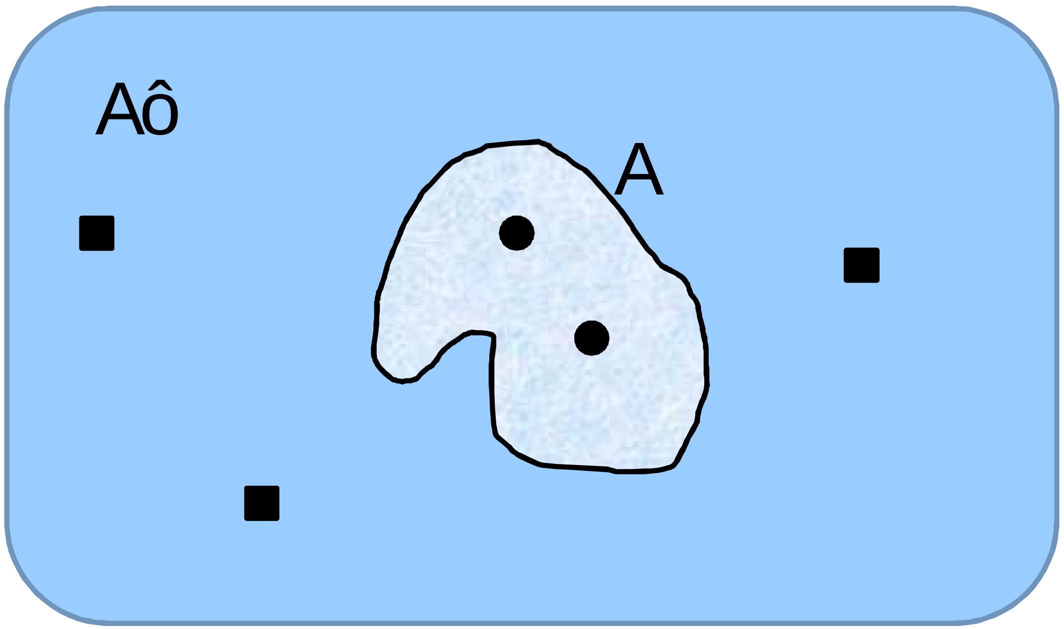
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_n)$$

Å Esta Lei Multiplicativa também é comumente chamada Lei ñÈò

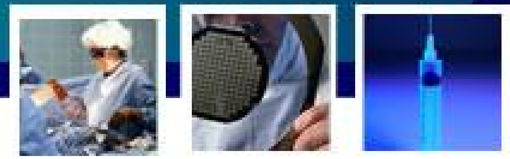
Exemplo

- Suponha que um ensaio foi realizado, apresentando um total de cinco ocorrências,

S



Exemplo

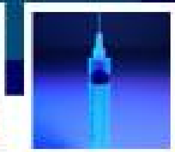


- Assim, a probabilidade de ocorrer A é
  - P(A) = 2/5 = 0,4 ou 40%
- Considere que o experimento é realizado duas vezes

2 / 1	A	A	Aô	Aô	Aô
A	AA	AA	AAô	AAô	AAô
A	AA	AA	AAô	AAô	AAô
Aô	AôA	AôA	AAô	AAô	AAô
Aô	AôA	AôA	AAô	AAô	AAô
Aô	AôA	AôA	AAô	AAô	AAô

Exemplo





- Qual a probabilidade de se obter seguidamente os valores A e A?
  - Pelo quadro anterior:

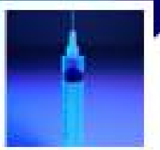
$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{4}{25} = 0{,}16 \; ou \; 16\%$$

  - Ou pela Lei Multiplicativa:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 0{,}16 \; ou \; 16\%$$

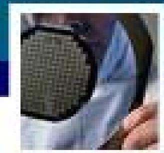
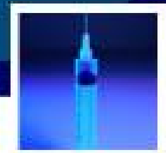
Exemplo



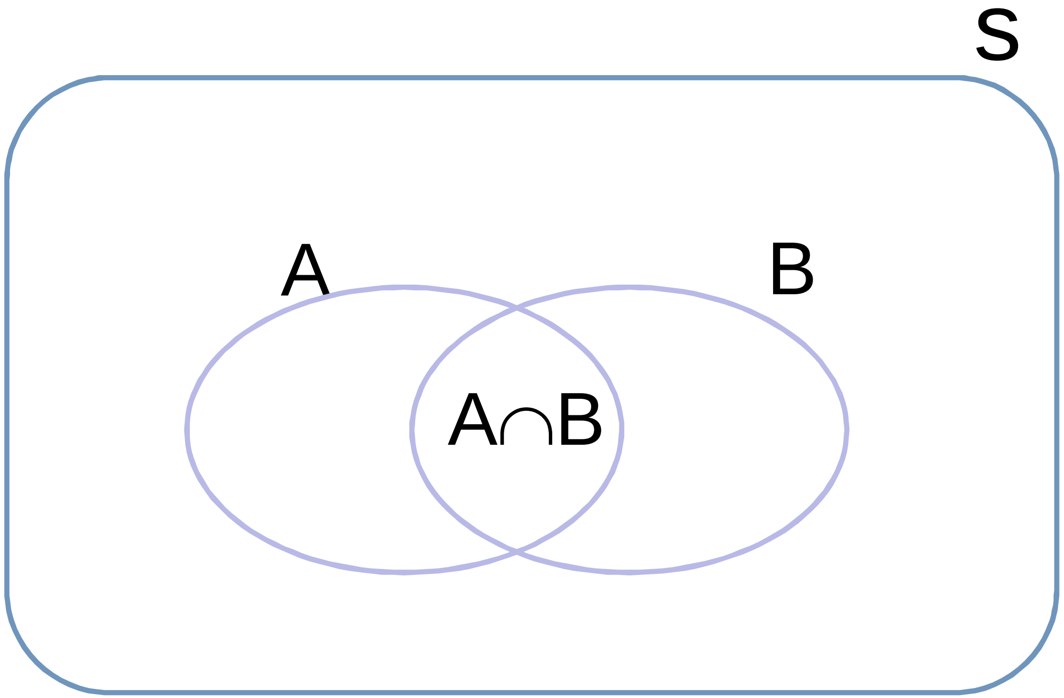


- Dado dois alelos A e B, com probabilidades *p* e *q* respectivamente. Considerando a reprodução aleatória, qual a frequência de AA, BB e AB
  - AA:
    - $P(A \cap A) = P(A)\,P(A) = p\,p = p^2$
  - BB:
    - $P(B \cap B) = P(B)\,P(B) = q\,q = q^2$
  - AB, este alelo pode ocorrer de duas formas
    - $P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = p\,q$
    - $P(B \cap A) = P(B)\,P(A) = q\,p$
    - Logo, $P(AB) = 2pq$

Lei Associativa

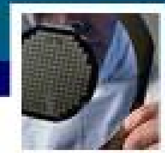
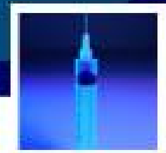




- Dado o Diagrama de Venn



  - Como expressar a União de A e B?

Lei Associativa

- Dado dois eventos A e B independentes, a probabilidade de que ocorra um destes dois eventos ou ambos os eventos é:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemplo

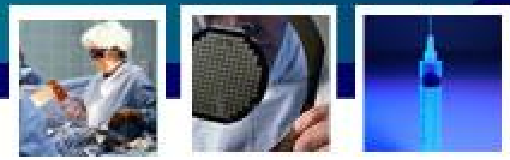


- Dados:

Ind.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Obeso	N	N	S	N	S	S	N	N	N	S	N	N	S	N	N
Sedentário	S	N	S	S	N	S	N	S	S	S	N	N	S	N	S

- Sendo A = obesidade e B= sedentarismo.
  - Qual a probabilidade *a posteriori* do indivíduo ser obeso?
    - $P(A)=5/15=0,3$ ou 30%
  - Qual a probabilidade *a posteriori* do indivíduo ser sendetário?
    - $P(B) = 9/15=0,6$ ou 60%
  - Qual a probabilidade *a posteriori* do indivíduo ser obeso e sententário?
    - $P(A \cap B)= 4/15 \cong 0,2667$ ou 26,67%

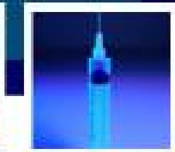
Exemplo



- Assim, a probabilidade de se selecionar um indivíduo obeso ou sedentário é:
  - $P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B) = 5/15+9/15-4/15 = 10/15 \cong 0{,}6667$ ou 66,67%
  - Da mesma forma, os indivíduos que não apresentam as duas característica simultaneamente têm probabilidade:
    - $P(A^c \cup B^c) = 5/15 \cong 0{,}3333$ ou 33,33%

Eventos Mutuamente Excludentes





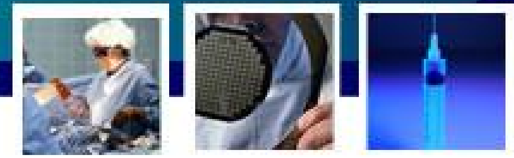
- Observe que se os eventos A e B são mutuamente excludentes, então:
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
    - Visto que a intersecção entre A e B é nula
    - Exemplo:
      - Dada uma fila de banco, quer-se priorizar dois casos: A=gestantes e B=idosos.
        - A e B são mutuamente excludentes!

Eventos Dependentes



- Até então foram considerados casos onde os eventos são independentes.
  - Ou seja, o acontecimento do evento A não depende da ocorrência prévia do evento B
- Entretanto é possível termos eventos dependentes,
  - Ou seja, o acontecimento do evento A depende da ocorrência prévia do evento B
    - Fala-se neste caso que A depende de B, (A|B)
      - Lê-se (A|B) como “A dado B”

Eventos Dependentes

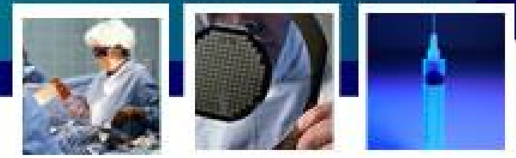


- Para o caso de eventos dependentes

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

- É necessário levar em consideração o condicional entre os eventos!

Probabilidade Condicional



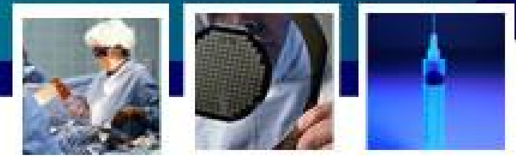
- Havendo dois eventos dependentes, A e B, diz-se:
  - O evento A está condicionado à ocorrência do evento B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

  - Assim, havendo dependência:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Probabilidade Condicional



- Observe que se não há dependência,

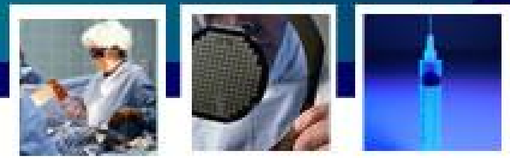
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$implicando\ em,$$

$$P\left(A \middle| B\right) = P(A)$$

$$P\left(B \middle| A\right) = P(B)$$

Exemplo



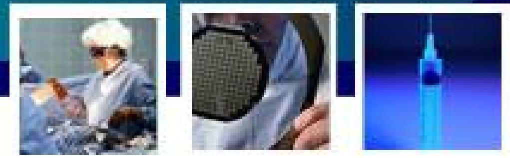
- Dado que um indivíduo pode ou não ter cirrose (A), e pode ou ser alcoólatra (B).
  - Representando os eventos na tabela

Eventos	**B**	**Bô**
A	AB	ABô
Aô	AôB	AôBô

- Observa-se P(A|B) + P(Aô|B) = 1, e P(A|Bô) + P(Aô|Bô) = 1
- Generalizando para *k* diferentes possibilidades para um evento:

$$\sum_{i=1}^{k} P\left(A_i \middle| B\right) = 1 \quad ou \quad \sum_{i=1}^{k} P\left(B_i \middle| A\right) = 1$$

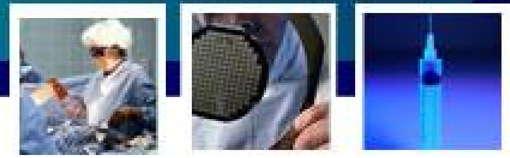
Risco Relativo



- Dado que um determinado indivíduo faça parte de uma certa população com característica B
  - Qual o risco adicional deste indivíduo ter uma condição A dado que ele tem a condição B?
  - Fator de Risco Relativo

$$RR = \frac{P(A|B)}{P(A|B')}$$

Exemplo

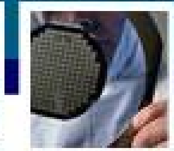
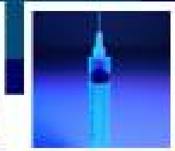


- Para o exemplo anterior, qual o risco de um indivíduo alcoólatra ter cirrose em relação a um indivíduo não alcoólatra?

$$RR = \frac{P(A|B)}{P(A|B')} = \frac{\frac{AB}{B}}{\frac{AB'}{B'}}$$

- Observe que o RR deve ser maior que 1, visto que a exposição ao fator alcoolismo deve aumentar as chance de se contrair cirrose!
  - Se o RR for menor que 1, então este é chamado de **fator de prevenção.**

Exemplo

Å Supondo

Eventos	B	Bô
A	9	2
Aô	26	43

$$RR = \frac{\frac{9}{9+26}}{\frac{2}{2+43}} = 5{,}79$$

Å Assim, o alcoólatra tem 4,79 (5,79 - 1) vezes mais chances de contrair uma cirrose do que um indivíduo não alcoólatra

Teorema de Bayes

- Suponha que a ocorrência de um determinado evento A possa ter sido originada de k diversas maneiras, $c_1, c_2, ..., c_k$

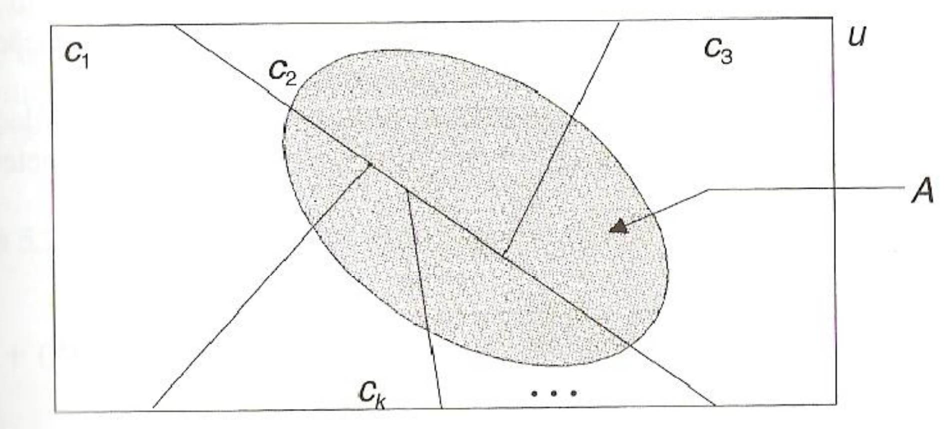
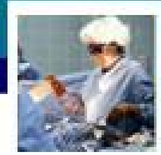
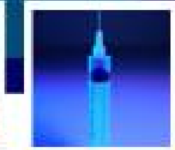


Fig. 5.10 Causas do evento *A*.

- Observe que as causas ci´s são mutuamente excludentes

Teorema de Bayes

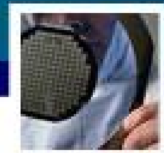
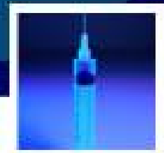
- Assim, a probabilidade do evento A será:
  - $P(A)=P(c_1)P(A|c_1)+P(c_2)P(A|c_2)+\ldots+P(c_k)P(A|c_k)$
  - Ou,

$$P(A)=\sum_{i=1}^{k} P(c_i)\cdot P\left(A\middle|c_i\right)$$

  - Logo,

$$P\left(c_i\middle|A\right)=\frac{P(A\cap c_i)}{P(A)}=\frac{P(c_i)\cdot P\left(A\middle|c_i\right)}{\sum_{i=1}^{k} P(c_i)\cdot P\left(A\middle|c_i\right)}$$

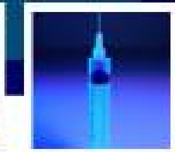
Exemplo

- Suponha ser conhecidas as características de uma população:
  - P1: Heterossexuais ï 63%
  - P2: Homossexuais ï 18%
  - P3: Hemofílicos ï 5%
  - P4: Usuários de Drogas ï 14%
    - Suponha também ser conhecidos os riscos de transmissão do HIV para as classes:
      - Heterossexuais: risco de 2,3%
      - Homossexuais: risco de 9,3
      - Hemofílicos: risco de 12%
      - Usuários de Drogas: risco de 17,1%

Exemplo

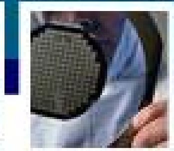
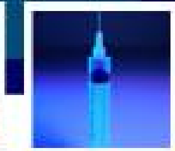




- Deseja-se:
  - A probabilidade de transmissão do HIV?
  - A probabilidade de um HIV+ ser proveniente dos heterossexuais?
    - Seja A=HIV+ e $\bar{A}$=HIV-, assim a probabilidade de HIV+
      - $P(A)=P(P_1)P(A|P_1)+P(P_2)P(A|P_2)+P(P_3)P(A|P_3)+P(P_4)P(A|P_4)$
      - P(A)=0,63.0,023+0,18.0,093+0,05.0,12+0,14.0,171=0,0617
      - Ou, P(A)=6,17%
    - A chance de um HIV+pertencer ao grupo Heterossexual é:

$$P\left(P_1|A\right)=\frac{P(P_1)\cdot P\left(P(A)|P_1\right)}{P\left(A\right)}=\frac{0{,}63\cdot 0{,}023}{0{,}0617}=0{,}2344\ ou\ 23{,}44\%$$

Referências

- Livro Texto: Bioestatística. Teoria e Computacional (Héctor G. Arango). Guanaba
  - Capítulo 5 (Seção 1)
- Leituras Complementares:
  - Livro: Estatística Básica (Wilton de O. Bussab e Pedro A. Morettin). Saraiva
    - Capítulo: 5
  - Livro: Probabilidade. Aplicações à Estatística (Paul L. Meyer). LTC
    - Seções: 1.6 e 1.7
    - Capítulos 2 e 3