

Algoritmos e Estrutura de Dados



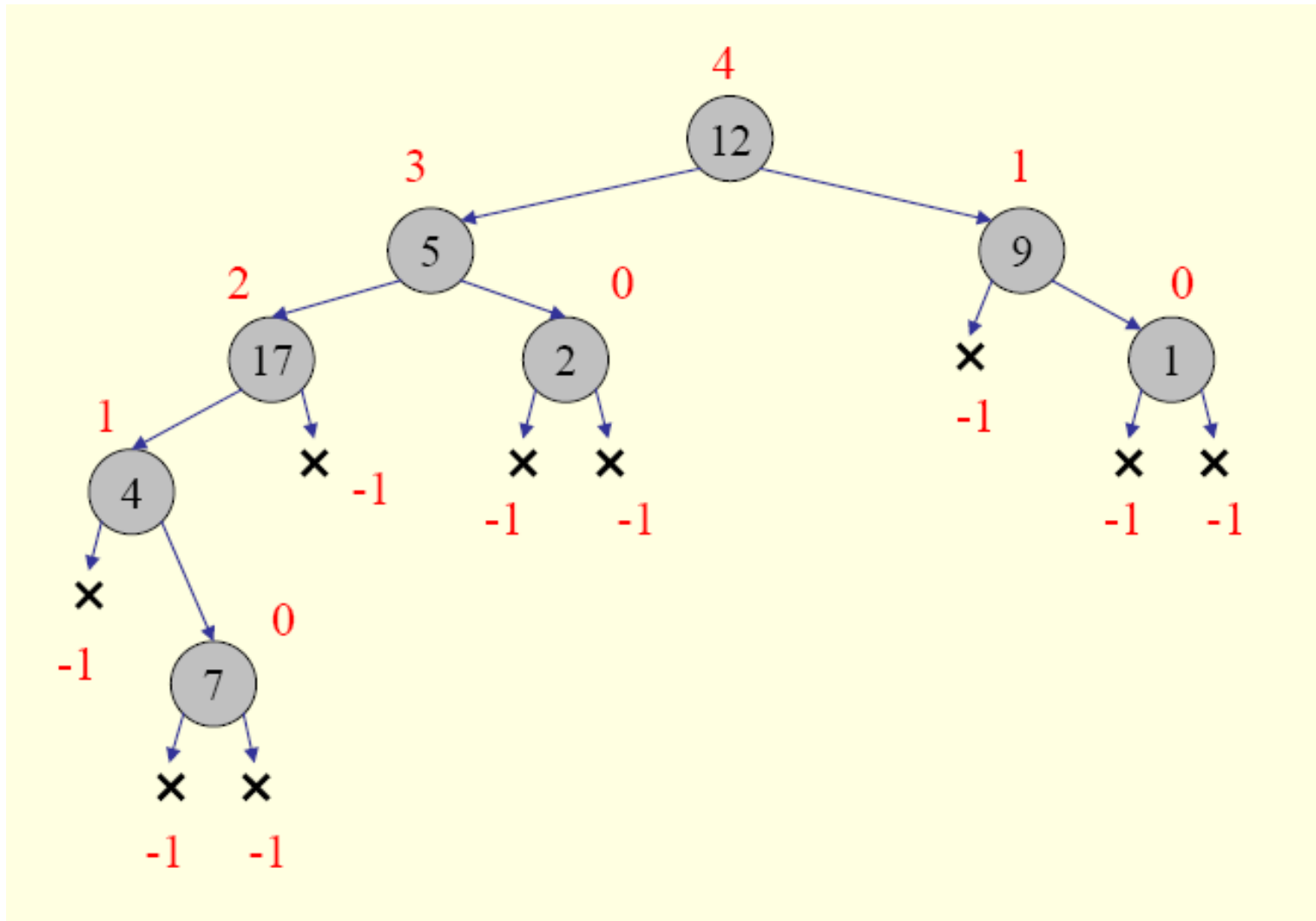
Aula 17 – Estrutura de Dados:
Árvores AVL

Prof. Tiago A. E. Ferreira

Introdução

- ❑ O nome **AVL** vem de seus criadores **Adelson Velskye Landis**, cuja primeira referência encontra-se no documento "*Algoritmos para organização da informação*" de 1962.
- ❑ É uma árvore de busca binária onde a altura da sub-árvore esquerda e a sub-árvore direita diferem de no máximo uma unidade.

Altura de Uma Árvore



Função para Retornar Altura de um Árvore Binária

Altura(x)

SE $x = \text{None}$

retorne -1

$h1 = \text{Altura}(x.\text{esquerda})$

$h2 = \text{Altura}(x.\text{direita})$

retorne $(1 + \text{Max}(h1, h2))$

Balanceamento

- Uma árvore AVL é dita balanceada quando, para cada nodo da árvore, a diferença entre as alturas das suas sub-árvores (direita e esquerda) não é maior do que um.
- Caso a árvore não estiver balanceada é necessário seu balanceamento através da rotação simples ou rotação dupla. O balanceamento é requerido para as operações de adição e exclusão de elementos.

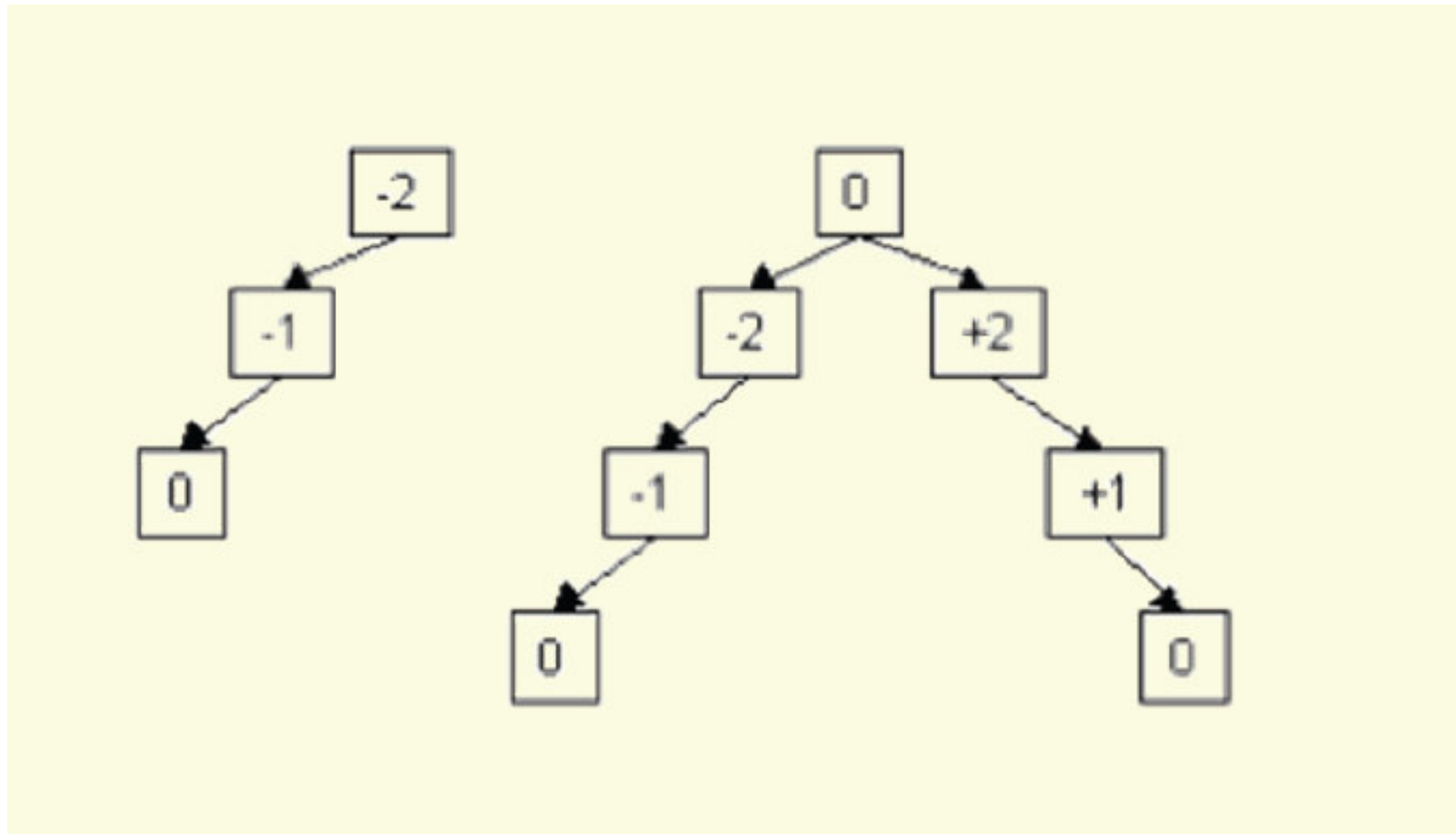
Fator de Balanceamento

- O fator de balanceamento de um nodo é dado pelo seu peso em relação a sua sub-árvore.
 - Um nodo pode ter um fator balanceado de 1, 0, ou -1.
 - Um nodo com fator de balanceamento -2 ou 2 é considerado um árvore não AVL e requer um balanceamento por rotação ou dupla-rotação.

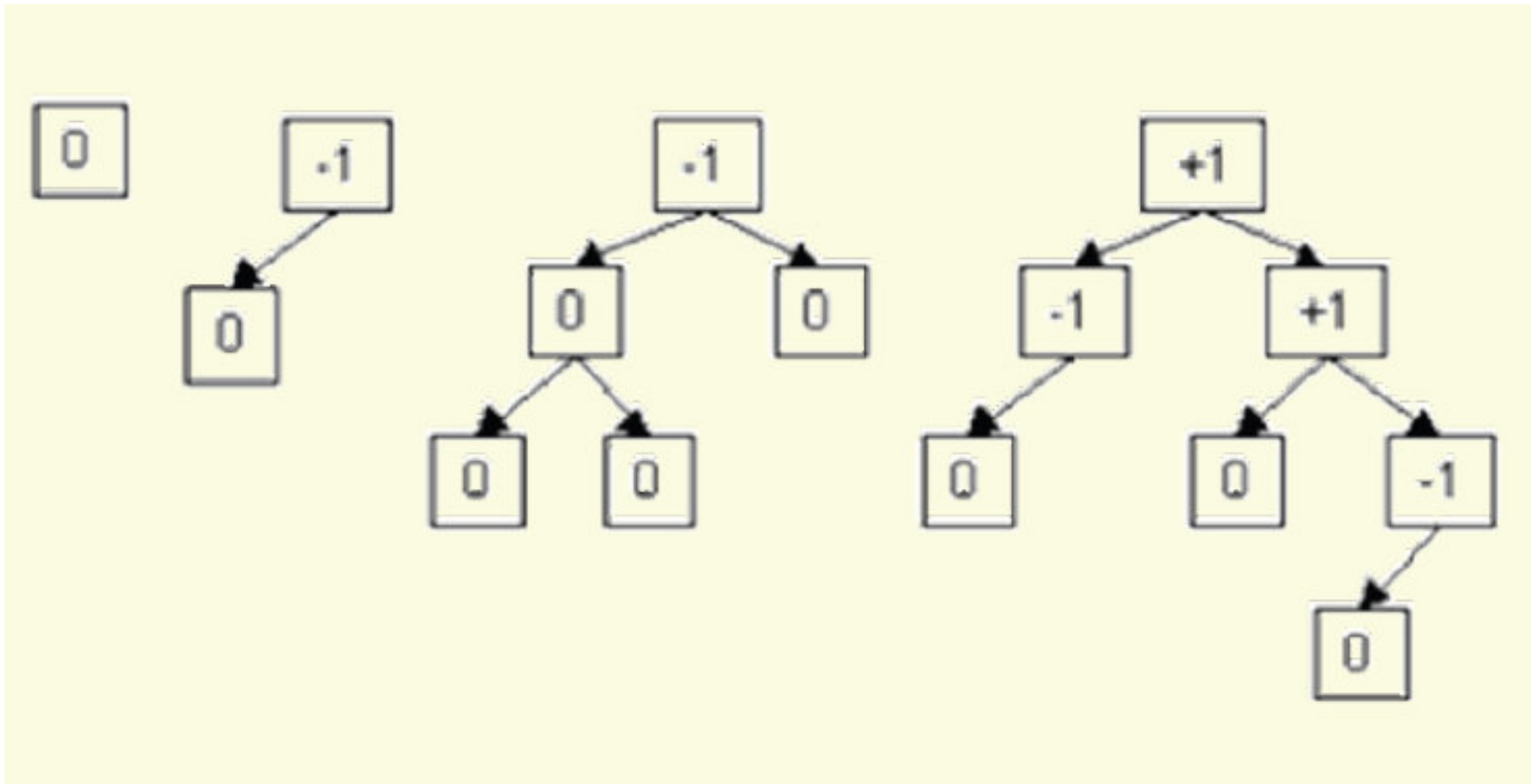
Cálculo do Fator de Balanceamento

- O fator de balanceamento pode ser dado como:
 - $h(\text{sub-árvore esquerda}) - h(\text{sub-árvore direita})$
 - Ou, **$h(\text{sub-árvore direita}) - h(\text{sub-árvore esquerda})$**
 - Onde $h(x)$ é a altura do nodo x .
 - Essa escolha irá influenciar no momento do balanceamento.

Exemplo de Árvores Não AVL



Exemplos da Árvores AVL



Balanceando uma Árvore

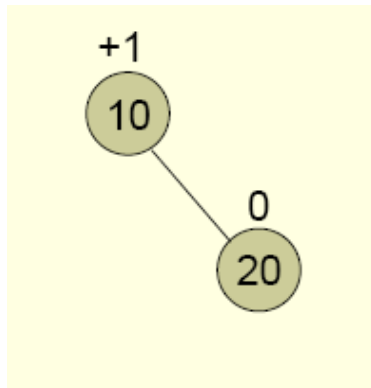
- Dada uma árvore não balanceada, como balanceá-la?
 - Através de operações de **rotações!!!!**
- Existem 4 operações de Rotações:
 - Rotação à Esquerda
 - Rotação à Direita
 - Rotação Dupla à Esquerda
 - Rotação Dupla à Direita

Quando usar as Rotações

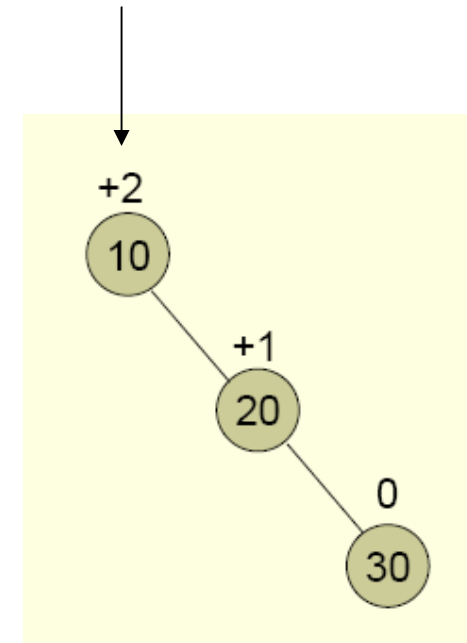
- Na inserção de um elemento
- Na remoção de um elemento
 - É provado que no máximo uma rotação é suficiente para realizar o balanceamento de uma árvore quando é inserido um novo elemento
 - A idéia da operação de balanceamento é equilibrar o fator de balanceamento da árvore

Exemplo: Rotação à Esquerda

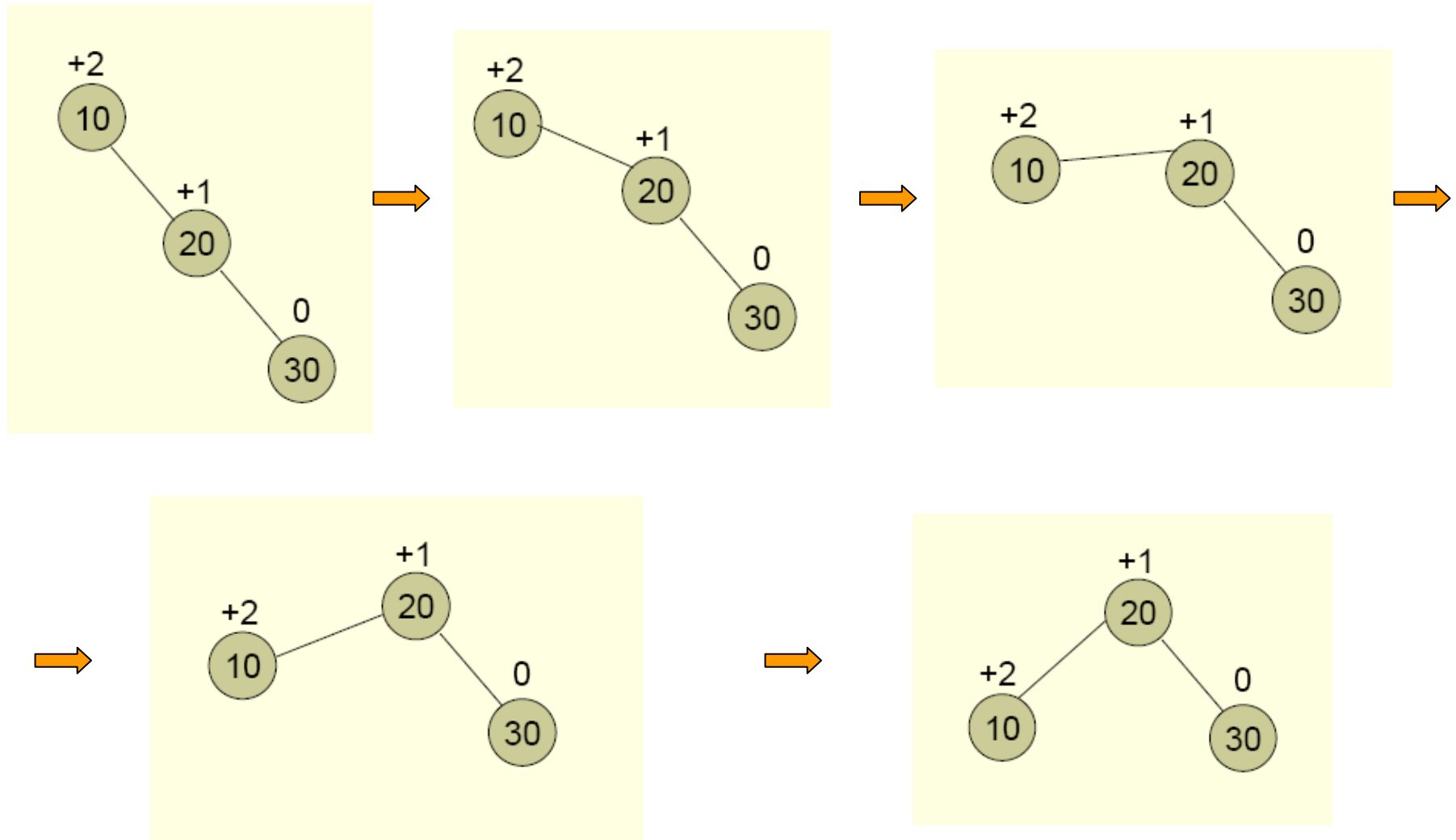
A árvore torna-se desbalanceada no nodo de valor 10



Inserindo um novo nodo

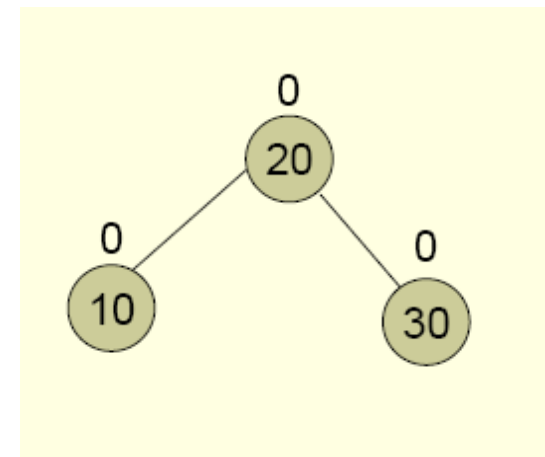
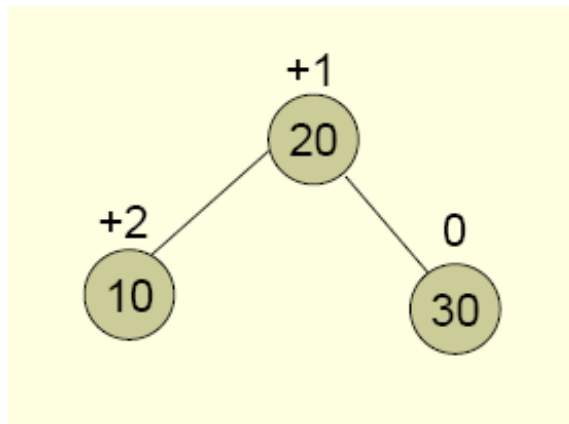


Exemplo: Rotação à Esquerda



Exemplo: Rotação à Esquerda

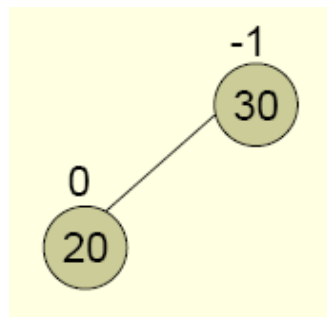
Recalculando o Fator de Balanceamento



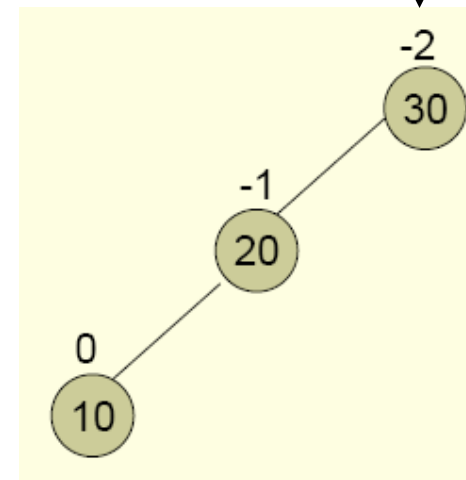
Árvore Balanceada

Exemplo: Rotação à Direita

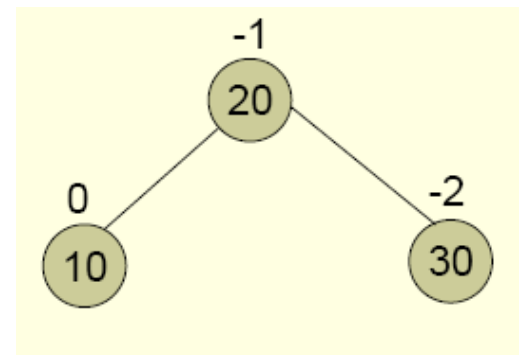
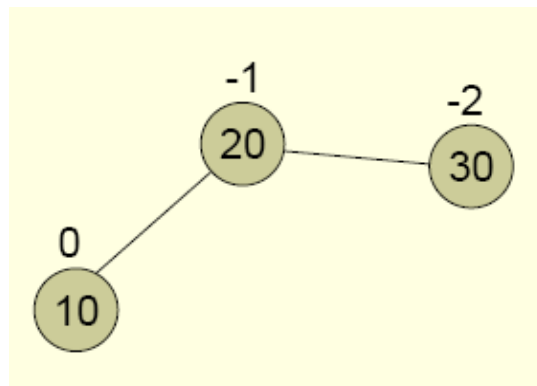
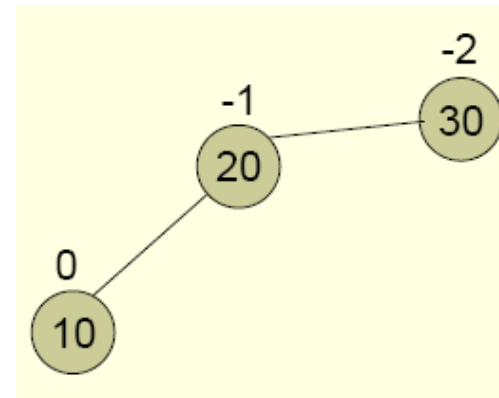
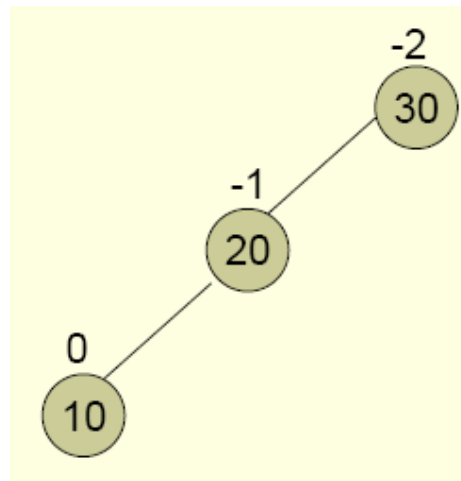
A árvore torna-se desbalanceada no nodo de valor 30



Inserindo um novo nodo

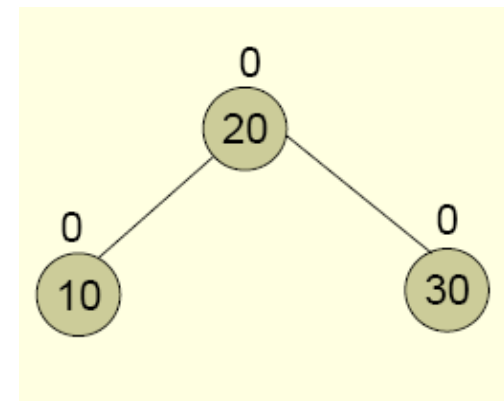
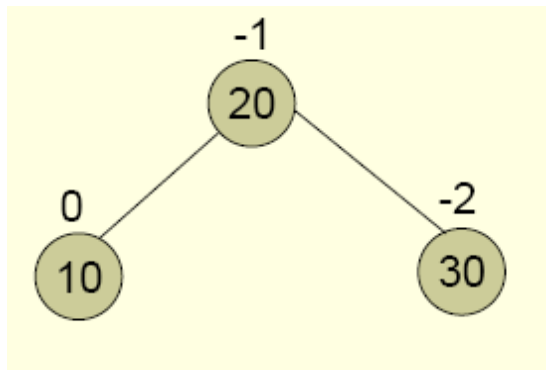


Exemplo: Rotação à Direita



Exemplo: Rotação à Direita

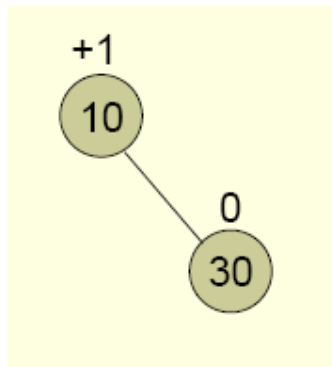
Recalculando o Fator de Balanceamento



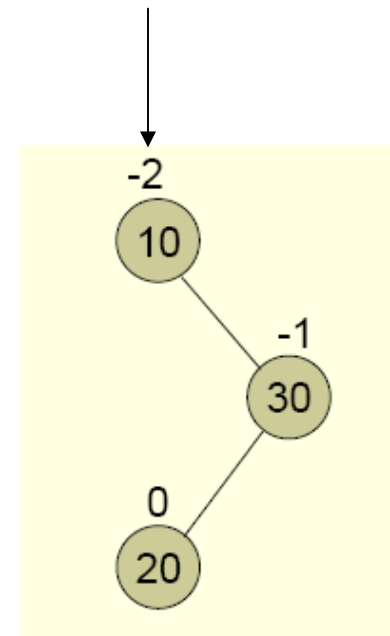
Árvore Balanceada

Exemplo: Rotação Dupla à Esquerda

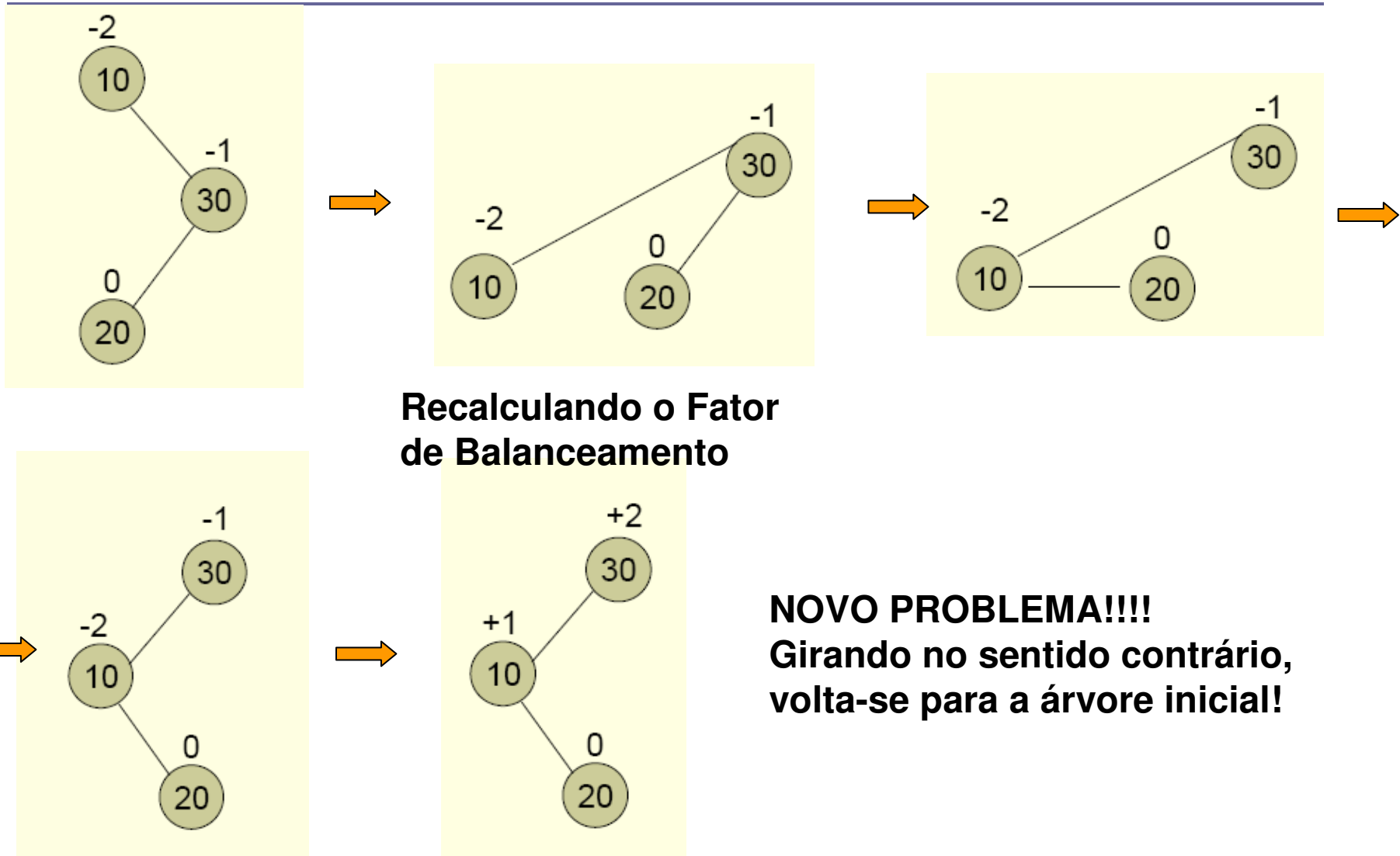
A árvore torna-se desbalanceada no nodo de valor 10



Inserindo um novo nodo

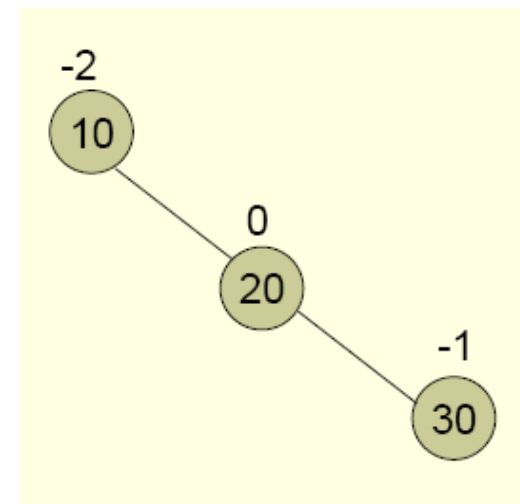
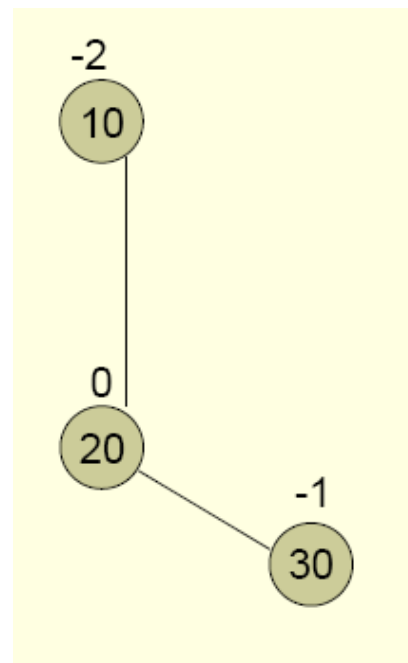
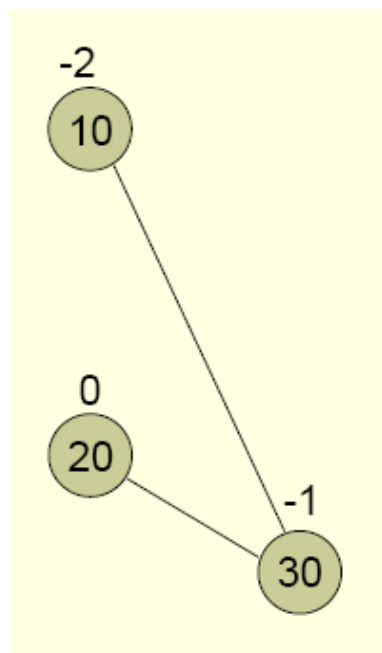
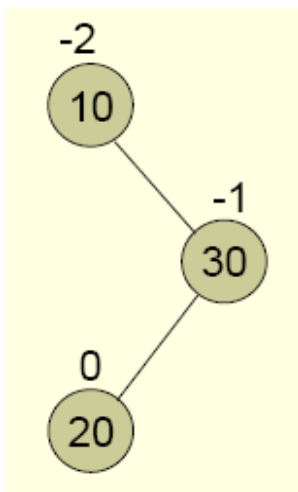


Exemplo: Rotação Dupla à Esquerda



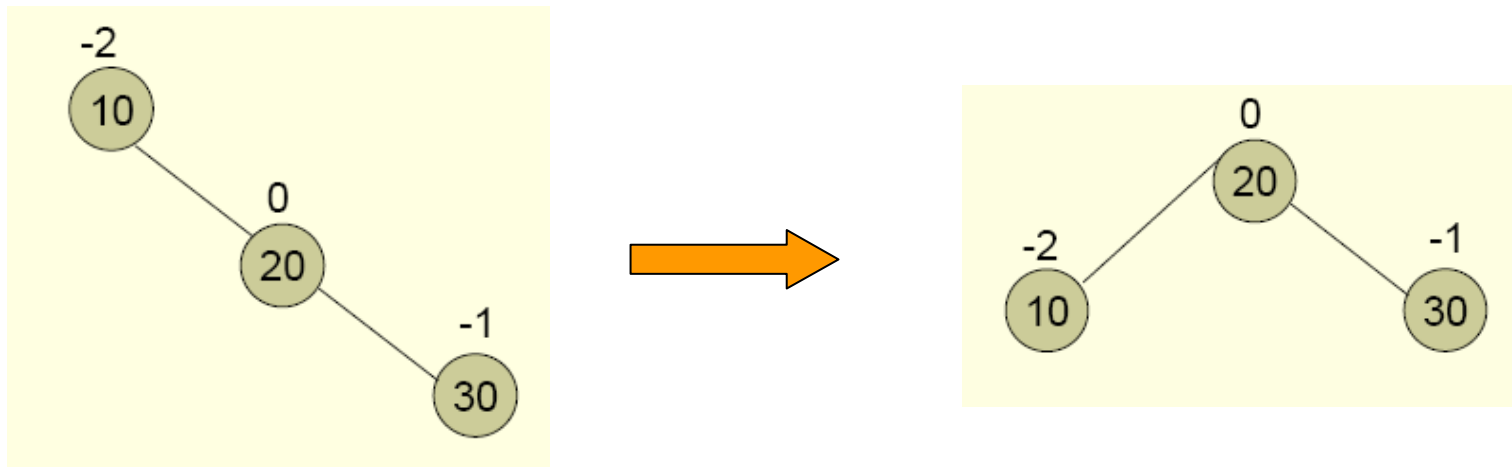
Exemplo: Rotação Dupla à Esquerda

Solução: Girar primeiro a árvore para a direita!

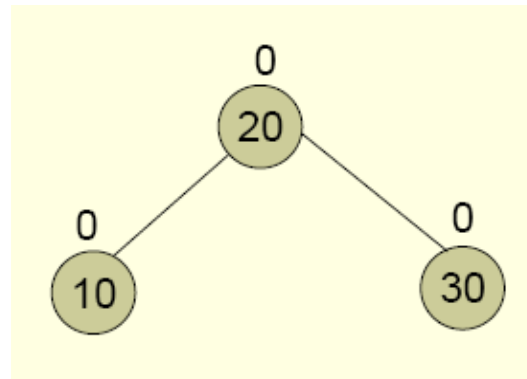


Agora girar para a esquerda

Exemplo: Rotação Dupla à Esquerda

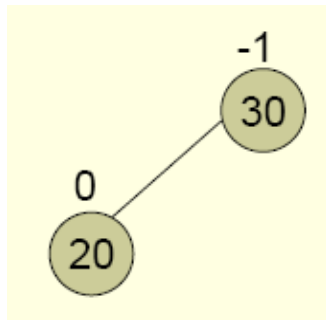


Recalculando o Fator de Balanceamento

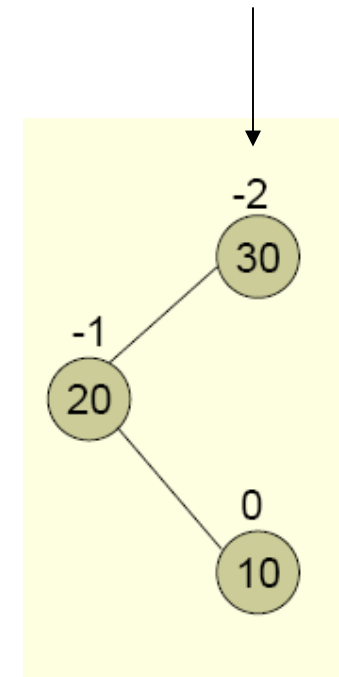


Exemplo: Rotação Dupla à Direita

A árvore torna-se desbalanceada no nodo de valor 30

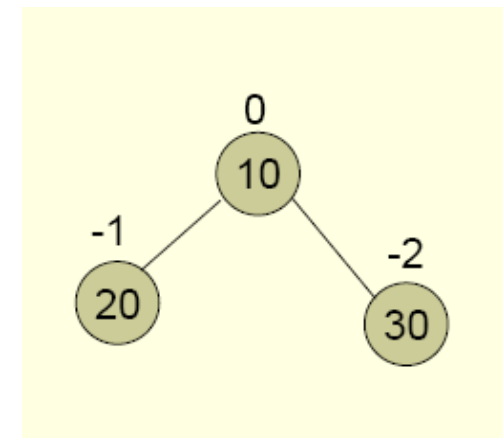
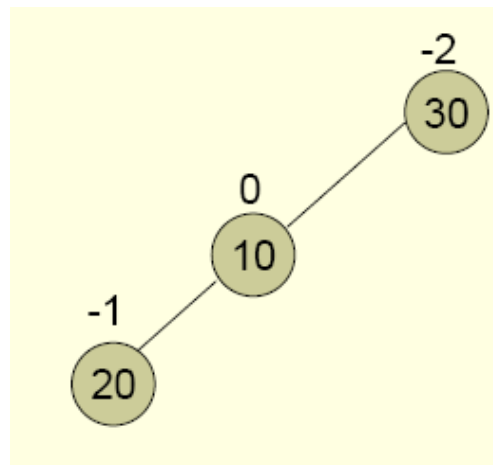
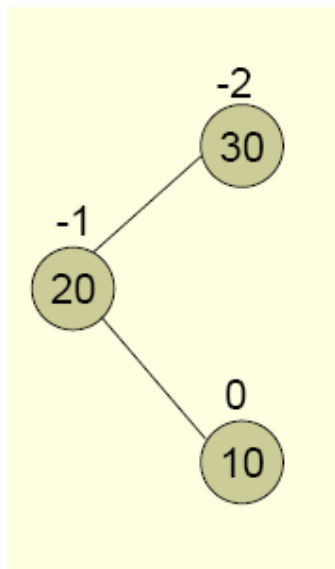


Inserindo um novo nodo

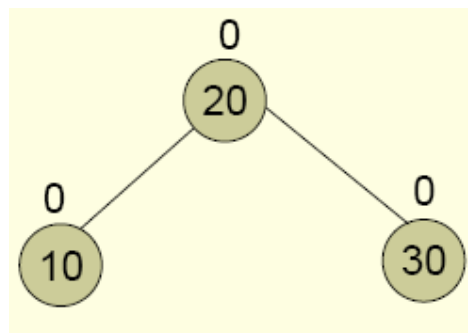


Exemplo: Rotação Dupla à Direita

Primeiro, rotaciona-se à esquerda, e então à direita:



Recalculando o Fator de Balanceamento



Removendo Elemento

- Os exemplos vistos são para o balanceamento de uma árvore binária a partir da inserção de um novo nodo na árvore
- Mas e se for desejado remover um determinado nodo da árvore?
 - Esta também irá, provavelmente, necessitar de um balanceamento!
 - Mas como proceder para a remoção de um nodo?

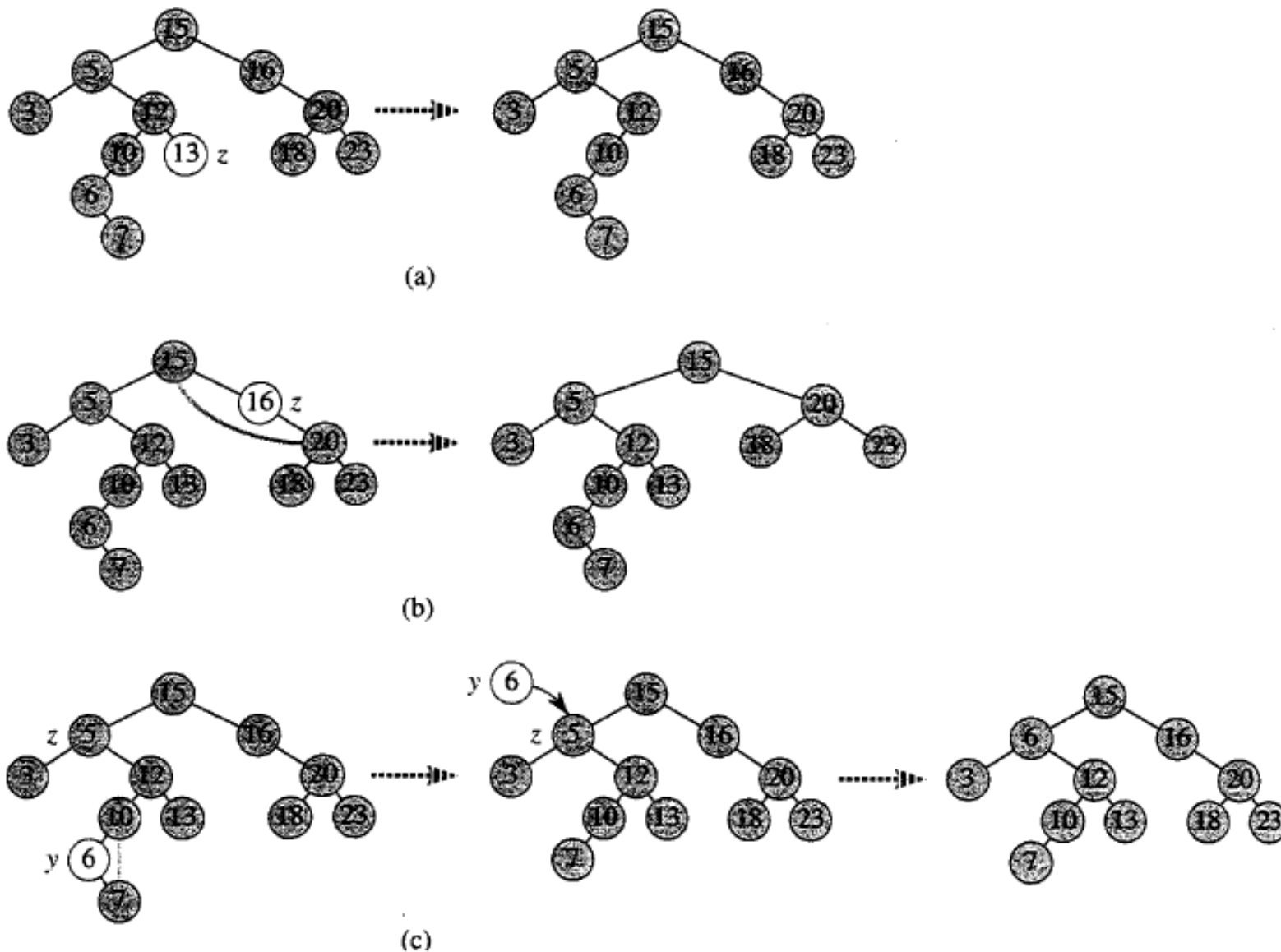


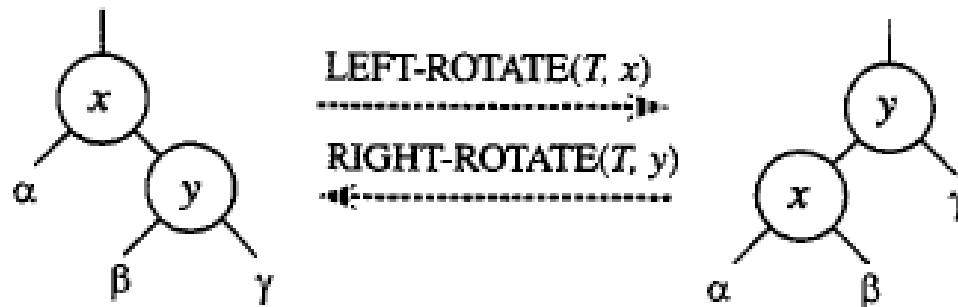
FIGURA 12.4 Eliminação de um nó z de uma árvore de pesquisa binária. O nó realmente removido depende de quantos filhos z tem; esse nó está levemente sombreado. (a) Se z não tem nenhum filho, simplesmente o removemos. (b) Se z tem apenas um filho, extraímos z . (c) Se z tem dois filhos, extraímos seu sucessor y , que tem no máximo um filho, e depois substituímos a chave e os dados satélite de z pela chave e os dados satélite de y .

Removendo Elemento

```
TREE-DELETE(T, z)
1  if esquerda[z] = NIL or direita[z] = NIL
2    then y ← z
3    else y ← TREE-SUCCESSOR(z)
4  if esquerda[y] ≠ NIL
5    then x ← esquerda[y]
6    else x ← direita[y]
7  if x ≠ NIL
8    then p[x] ← p[y]
9  if p[y] = NIL
10   then raiz[T] ← x
11   else if y = esquerda[p[y]]
12         then esquerda[p[y]] ← x
13         else direita[p[y]] ← x
14  if y ≠ z
15    then chave[z] ← chave[y]
16         copiar dados satélite de y em z
17  return y
```

Removendo Elemento

- Uma Vez removido o elemento, o fator de balanceamento deve ser recalculado e a árvore balanceada, se necessário, como as operações de rotação!
 - Mas como implementar as operações de rotação?



Rotação à Esquerda

LEFT-ROTATE(T, x)

- 1 $y \leftarrow direita[x]$ ▷ Define y .
- 2 $direita[x] \leftarrow esquerda[y]$ ▷ Faz da subárvore esquerda de y a subárvore direita de x .
- 3 $p[esquerda[y]] \leftarrow x$
- 4 $p[y] \leftarrow p[x]$ ▷ Liga o pai de x a y .
- 5 **if** $p[x] = nil[T]$
- 6 **then** $raiz[T] \leftarrow y$
- 7 **else if** $x = esquerda[p[x]]$
- 8 **then** $esquerda[p[x]] \leftarrow y$
- 9 **else** $direita[p[x]] \leftarrow y$
- 10 $esquerda[y] \leftarrow x$ ▷ Coloca x à esquerda de y .
- 11 $p[x] \leftarrow y$

Rotação à Esquerda

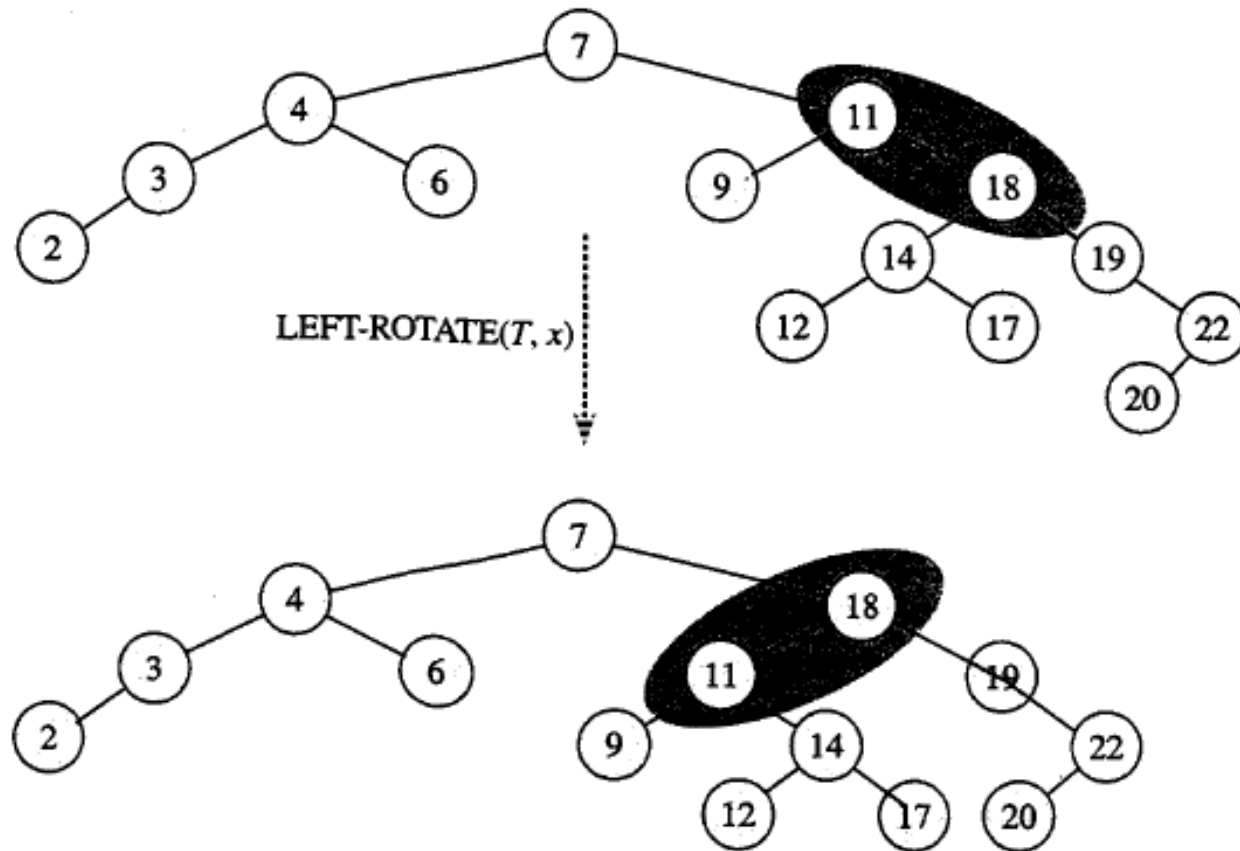


FIGURA 13.3 Um exemplo de como o procedimento $\text{LEFT-ROTATE}(T, x)$ modifica uma árvore de pesquisa binária. Os percursos de árvore em ordem da árvore de entrada e a árvore modificada produzem a mesma listagem de valores de chaves

Rotação à Direita

- Esta rotação é o processo inverso da rotação à esquerda...
- Como seria o seu pseudo-código?