

# AUTÓMATOS CELULARES, MÁQUINAS DE TURING OU A NATUREZA COMO MÁQUINA DE CÁLCULO

*Os autómatos celulares são modelos matemáticos discretos, facilmente implementáveis em computador, e com aplicações na simulação em tempo real de sistemas físicos, biológicos e sociais, com um grande número de componentes em interacção.*

RUI DILÃO

**O**s organismos vivos são constituídos por milhões de células que em conjunto desempenham tarefas de grande complexidade. Embora cada célula tenha uma estrutura interna que obedece às leis da física e da bioquímica, é a interacção entre células próximas que gera todos aqueles fenómenos que designamos genericamente por Vida.

Tomando como exemplo o cérebro humano, este é constituído por pequenas células, os neurónios, ligadas às células mais próximas através das sinapses. As sinapses podem conduzir uma corrente eléctrica de baixa intensidade, estimulando os neurónios a que estão ligadas. Cada neurónio tem uma estrutura interna constituída por um núcleo celular, membranas, etc., que, por sua vez, são constituídas por moléculas e átomos. Todos os neurónios têm uma estrutura interna semelhante e reagem da mesma maneira a um estímulo exterior controlado. Porém, os detalhes químicos e físicos do funcionamento individual dos neurónios não chegam para explicar as funções que o cérebro realiza globalmente. Existem outros mecanismos resultantes da acção colectiva dos neurónios e que seguem leis de evolução diferentes das leis microscópicas, desempenhando funções bem determinadas como sejam o controlo de fluxo sanguíneo, a sensibilidade auditiva, etc.

O cérebro é um exemplo de sistema complexo. É formado por um grande número de células ou unidades individuais cujo funcionamento

é conhecido, mas em que as interacções entre as células cooperam para fenómenos globais que não são caracterizáveis pelos mesmos parâmetros que os elementos individuais. A um sistema complexo aparecem associados efeitos colectivos que são o resultado observável do comportamento global do sistema, quer seja um sistema biológico ou físico.

Outro exemplo de sistema complexo com efeitos colectivos é um gás no interior de um recipiente.

O estado macroscópico do gás é completamente especificado pela pressão, temperatura e densidade, e não depende das características internas dos seus átomos. A passagem da descrição microscópica, com um grande número de variáveis, correspondentes às posições e velocidades de todos os átomos do gás, à descrição macroscópica, em termos de pressão, temperatura e densidade, constitui o domínio da física designado por termodinâmica. Fazendo a analogia entre os fenómenos colectivos de um gás e os fenómenos colectivos do cérebro, a descrição do comportamento colectivo dos neurónios corresponde a uma «termodinâmica do cérebro», possivelmente com um grande número de variáveis macroscópicas.

Os dois sistemas que acabámos de descrever têm em comum o facto de ambos serem constituídos por muitas células ou átomos iguais, com leis de interacção bem conhecidas. No caso do gás as leis de interacção são simples, no caso do cérebro as leis de interacção são mais complexas. Ambos os sistemas



**Licenciado em Física pela Universidade de Lisboa, Rui Dilão é professor auxiliar no Instituto Superior Técnico, onde obteve, em 1986, o grau de doutor em Física; após o doutoramento foi, durante dois anos, fellow do Centro Europeu de Pesquisas Nucleares (Genebra). Autor ou co-autor de numerosas publicações em revistas especializadas, bem como de algumas obras didácticas, a sua investigação tem incidido na Teoria dos Sistemas Dinâmicos, nos Autómatos Celulares e na Física dos Aceleradores de Partículas. Rui Dilão é, desde 1984, colaborador da conceituada revista *Mathematical Reviews*.**

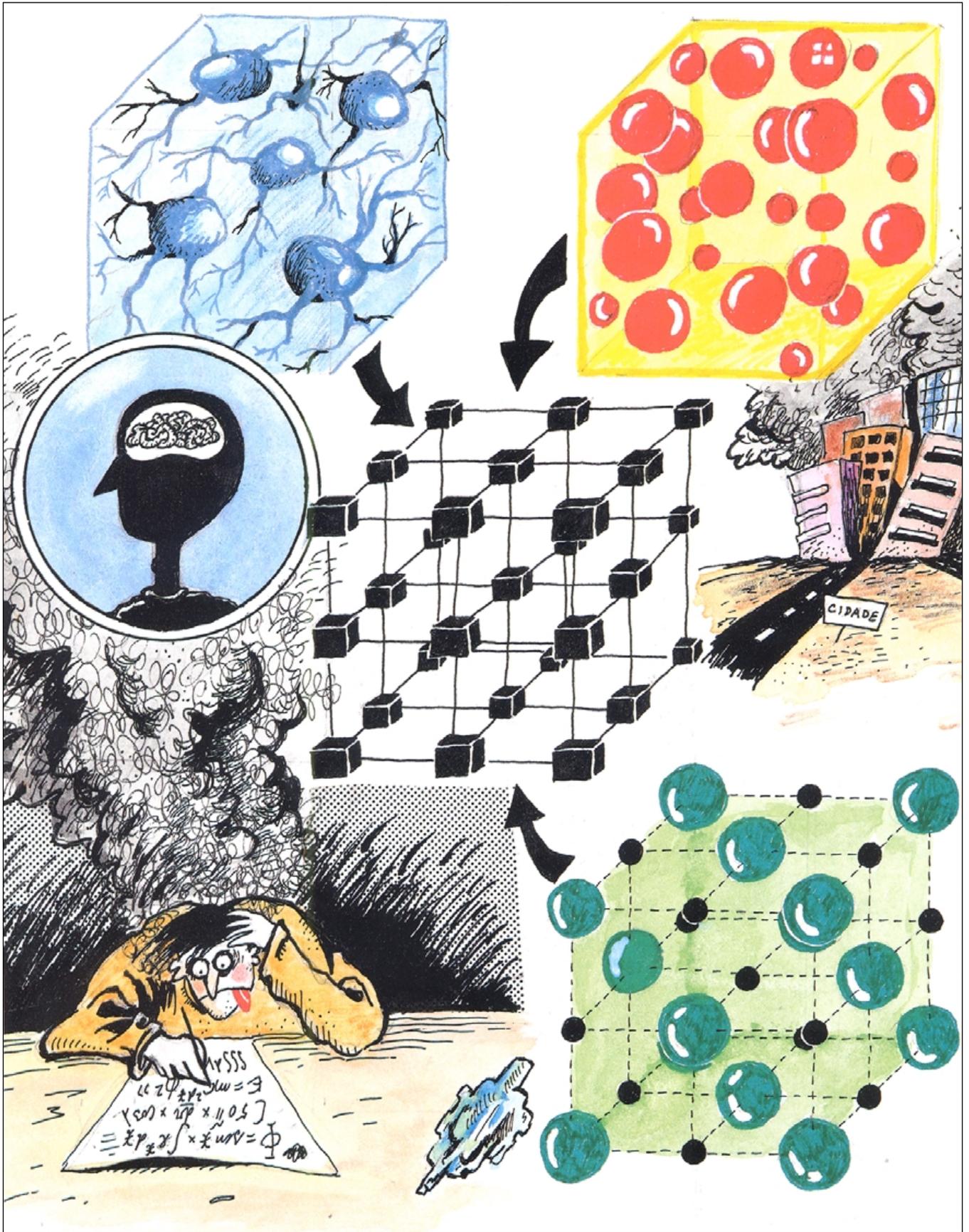


Fig. 1 – Representação de um arranjo de neurónios do tecido cerebral, moléculas de um gás, átomos de um cristal e estrutura tridimensional de caixas negras.

têm um comportamento macroscópico colectivo que não é caracterizado pelos mesmos parâmetros que os elementos individuais à escala microscópica. Claro está que esta visão é reducionista no sentido em que se está a isolar a natureza das interacções da dinâmica interna dos elementos constituintes dos sistemas. Contudo, tem sido esta a abordagem da ciência moderna quando os sistemas em questão manifestam comportamentos que se realizam em diferentes escalas, neste caso, as escalas microscópica e macroscópica.

Nos seres vivos existe outra característica que tem escapado a todas as tentativas de sistematização e implementação: é a capacidade destes se reproduzirem e de evoluírem, eliminando defeitos e erros.

Este aspecto não levanta problemas de maior nos sistemas inertes como os gases, pois é sempre possível construir um sistema idêntico através de operações simples. Por exemplo, introduzindo uma parede isolante no interior de um gás em equilíbrio, obtêm-se dois gases com as mesmas propriedades macroscópicas, ou seja, com a mesma pressão, temperatura e densidade. No entanto, num organismo, o processo de reprodução (ou duplicação) segue leis bem mais complicadas e actualmente apenas se conhecem alguns dos mecanismos de todo este processo. De facto, é muito difícil de imaginar quais os procedimentos que se teriam de implementar para construir uma máquina com a capacidade de se auto-reproduzir.

Um terceiro tipo de sistemas com características semelhantes aos que temos vindo a falar é o da dinâmica de uma multidão ou de uma assembleia. Neste caso, todos temos observado que o comportamento global não depende dos comportamentos individuais, mas sim das interacções que se geram. Se alguns movimentos se atenuam ao fim de algum tempo, outros propagam-se e transformam-se no resultado observável do comportamento colectivo.

Em todos estes sistemas existem variáveis que dependem de leis de interacção local, mas o comportamento global evolui para estados que não são caracterizados macroscopicamente por estas grandezas. O estado macroscópico ou colectivo é caracterizado por outras variáveis, como a pressão ou a temperatura dos gases, e segue uma dinâmica própria que em princípio será possível obter das leis microscópicas de interacção local.

No entanto, o problema não é assim tão simples e, na prática, conhecem-se muito poucos sistemas em que este programa tenha sido realizado completamente. Por exemplo, a turbulência dos fluídos tem escapado completamente a todo o tipo de descrição em termos de variáveis colectivas, embora tenham trabalhado neste problema alguns grandes físicos deste século (Heisenberg, Sommerfeld, Chandrasekhar e Born, entre outros).

Perante esta situação, a abordagem mais simples para estudar o aparecimento e a evolução de fenóme-

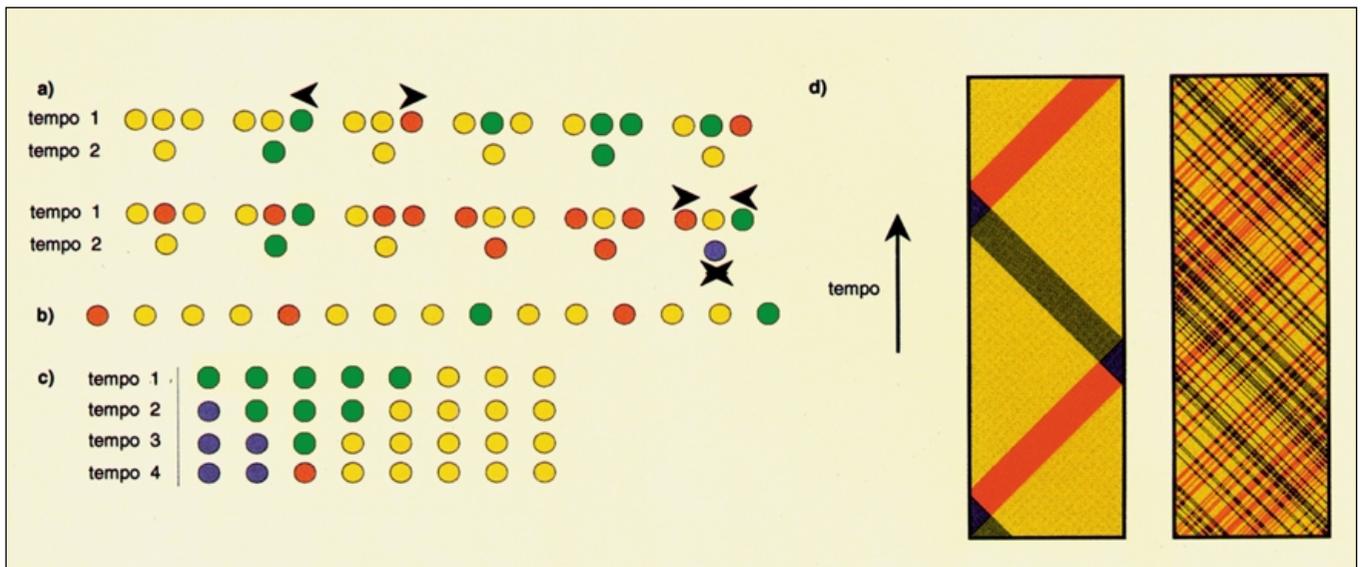
nos colectivos consiste em simplificar a estrutura dos sistemas e construir uma linguagem adaptada à sua descrição. É assim que vai aparecer o conceito de autómato celular. Nos parágrafos seguintes, veremos como esta simplificação nos vai conduzir a modelos tão gerais que incluem a própria teoria da computação e das máquinas de cálculo.

Nos sistemas (físicos) que manifestam comportamentos caóticos, turbulentos e não-lineares, a nossa capacidade de cálculo e previsão é muito pequena, não havendo, no estado actual do conhecimento, outra alternativa senão a da simulação em laboratório. Ora isto torna-se impraticável quando o sistema em questão é, por exemplo, a atmosfera terrestre e queremos fazer previsões climáticas. A aplicabilidade dos modelos de autómatos celulares à simulação destes sistemas aparece como uma alternativa e, devido à ligação directa entre os modelos de autómatos e a teoria da computação, a natureza aparece como uma gigantesca máquina de cálculo.

### **UM MODELO SIMPLES PARA OS FENÓMENOS COLECTIVOS**

Na Figura 1 estão representadas: uma porção de tecido do cérebro, as moléculas de um gás, um arranjo cristalino e finalmente uma estrutura espacial constituída por caixas negras ligadas entre si. Podemos então imaginar que o modelo matemático mais simples para estudar o desenvolvimento de fenómenos colectivos é considerar a estrutura espacial de caixas negras como representativas de um sistema formado por elementos ou células idênticas, não interessando o que está dentro das caixas ou qual a sua dinâmica interna. As caixas negras ou células comunicam entre si por intermédio das ligações, através das quais se definem as leis de interacção. Um sistema com uma configuração espacial deste tipo tem uma estrutura celular. Como cada célula tem uma estrutura interna que é independente do meio onde está inserida e reage sempre da mesma maneira a estímulos idênticos, diz-se que as células têm um comportamento automático. Tem-se então uma estrutura celular de autómatos ou, como se designa vulgarmente, um autómato celular.

A estrutura celular de autómatos está contida no espaço ambiente tridimensional. Para simplificar ainda mais este modelo, podemos passar para um sistema a uma dimensão, portanto uma linha de caixas equidistantes em que cada caixa vê apenas ou interage directamente com os seus vizinhos mais próximos. Para concretizar, vamos então considerar um modelo simples unidimensional em que cada caixa pode estar num certo estado: o estado vazio correspondente à cor amarela, e os estados ocupados correspondentes às cores vermelha, verde e azul, Figura 2 .



**Fig. 2** – Modelo de autómato celular que simula a evolução de um gás unidimensional de partículas. A cor indica o estado das células. a) Regra de evolução local no tempo. A cor vermelha representa uma partícula que se desloca da esquerda para a direita. A cor verde indica uma deslocação no sentido direita-esquerda. A cor azul indica um estado ocupado por duas partículas com velocidades de sentidos opostos e a cor amarela uma célula desocupada. b) Estado colectivo da rede de partículas. c) Evolução com colisão com a fronteira. d) Evolução a partir de uma configuração inicial ordenada e de uma configuração desordenada.

Podemos agora identificar este sistema unidimensional com um gás cujos átomos se podem deslocar ao longo de uma linha recta. Quando uma caixa está no estado amarelo, nessa posição não existe nenhuma partícula. Se uma caixa está no estado vermelho ou verde então existe aí um átomo que se desloca, respectivamente, para a direita ou para a esquerda. O estado azul representa a ocupação da célula por duas partículas com a mesma velocidade mas sentidos opostos. Este sistema vai evoluir no tempo de acordo com as leis dos choques de partículas e, em cada instante, a posição de uma partícula vai depender do seu estado de movimento e também do estado de movimento das partículas vizinhas. Vão existir no total 64 estados locais possíveis. Na Figura 2 a) estão representados alguns dos 64 estados locais possíveis das partículas, assim como o resultado da sua evolução temporal. Na Figura 2 b) está representado o estado colectivo de um conjunto de partículas ao longo da linha.

Como o gás de partículas está contido num recipiente, quando a partícula mais à esquerda atinge o limite do contentor, com uma velocidade dirigida no sentido direita-esquerda, a colisão muda o sentido da velocidade ficando a célula mais à esquerda no estado azul, ou seja, ocupada por duas partículas, pois as partículas imediatamente a seguir deslocam-se apenas da direita para a esquerda, Figura 2 c).

No instante zero, as partículas encontram-se num certo estado caracterizado pela cor das caixas. Num instante seguinte, digamos tempo um, todas as partículas se moveram com a mesma velocidade e interagiram com as partículas vizinhas. O estado do autómato no instante um é determinado pelas regras exemplifi-

cadas na figura 2 a), sendo todos os estados das caixas analisados simultaneamente.

Podemos então, para testar a realidade deste modelo, fazer uma simulação numérica mostrando a evolução da rede unidimensional de partículas, observando qual vai ser o comportamento do sistema ao fim de um tempo muito grande. A pergunta que se faz agora é saber se o sistema evolui para um estado bem determinado e facilmente caracterizável macroscopicamente. Na figura 2 d) está representada a evolução temporal do autómato, para condições iniciais diferentes. Como se vê, o estado final depende das condições iniciais escolhidas e não se obtêm as características de um gás em equilíbrio termodinâmico. De facto, neste sistema a evolução temporal vai ser fortemente dependente das condições iniciais, no sentido em que, ao longo do tempo, posições de moléculas localizadas mantêm-se localizadas e, posições iniciais aleatórias mantêm-se com o mesmo tipo de complexidade. Um gás em equilíbrio termodinâmico tem configurações espaciais aleatórias mesmo que as condições iniciais correspondam a uma configuração inicial ordenada. Assim, para se obter um modelo de autómato celular com as características de um gás é necessário analisar quais os mecanismos físicos responsáveis pelas interacções e implementá-los na lei de evolução.

Este modelo de autómato celular para a simulação da evolução temporal de um gás, exemplifica como construir as regras de evolução temporal ou de interacção implementada na rede de autómatos. Por outro lado, este tipo de modelos é muito útil para seleccionar os mecanismos mínimos que originam um certo fenómeno. De facto, foi a análise detalhada da

versão contínua deste modelo que levou Lee e Yang a formular a teoria das transições de fase de condensação (transições líquido-gás). Por exemplo, estes autores concluíram que para se obterem simulações realistas de um gás são importantes: a possibilidade de existir um conjunto muito grande de velocidades diferentes, o facto de as interacções se realizarem a três dimensões e de as partículas serem consideradas como pontuais. No exemplo que acabámos de apresentar, existe apenas uma velocidade possível para as partículas, as interacções estão constrangidas a uma rede unidimensional e as leis locais de interacção são apenas compatíveis com partículas de dimensões finitas. Mais à frente veremos que algumas modificações na construção do autómato celular nos vão conduzir a simulações mais realistas.

Para se efectuarem as simulações apresentadas na Figura 2 d) construiu-se um programa de computador que tem a estrutura de um programa para uma máquina de Turing.

## MÁQUINAS DE TURING

A observação de qualquer fenómeno e a sua reprodutibilidade, isto é, a sua repetição mantendo aproximadamente as mesmas características físicas, biológicas ou sociais, é um processo de cálculo. Em particular, uma experiência física, química ou biológica é um processo de cálculo como outro qualquer. Por outras palavras, existe um procedimento bem determinado,

### QUADRO I

---

Para melhor compreender a obra de Turing no domínio da lógica e da computação, transcrevemos um excerto da peça de Hugh Whitemore, *Breaking the code* (Amber Lane Press):

---

**Turing:** It's about right and wrong. In general terms. It's a technical p-p-paper in mathematical logic, but it's also about the difficulty of telling right from wrong. [*brief pause*]. People think – most people think – that in mathematics we always know what is right and what is wrong. Not so. Not any more. It's a problem that occupied mathematicians for forty or fifty years. How can you tell right from wrong? You know Bertrand Russel?

**Knox:** We've met.

**Turing:** Well he's written an immense book about it: *Principia Mathematica*. His idea was to break down all mathematical concepts and arguments into little bits and then show that they could be derived from pure logic, but it didn't quite work out that way. After many years of intensive work, all he was able to do was to show that it's terribly difficult to do anything of the kind. But it was an important book. Important and influential. It influenced both David Hilbert and Kurt Gödel. [*a brief digression*] You could, I suppose, make a comparison between these preoccupations and what physicists call «splitting the atom». As analysing the physical atom has led to the discovery of a new kind of physics, so the attempt to analyse these mathematical atoms has led to a new kind of mathematics. [*resuming the main thread of his explanation*] Hilbert took the whole thing a stage further. I don't suppose his name means m-m-much to you – if anything – but there we are, that's the way of the world; people never seem to hear of the really great mathematicians. Hilbert looked at the problem from a completely different angle, and he said, if we are going to have fundamental system for mathematics – like the one Russel was trying to work out – it must satisfy three basic requirements: consistency, completeness and decidability. Consistency means that you won't ever get a contradiction in your own system; in other words, you'll never be able to f-f-follow the rules of your system and end up by showing that two and two make five. Completeness means that if any statement is true, there must be some way of proving it by using rules of your system. And decidability means, hu – decidability means that there must exist some method, some d-d-definite procedure or test, which can be applied to any given assertion and which will decide whether or not that assertion is provable. Hilbert thought that this was a very reasonable set of requirements to impose; but within a few years Kurt Gödel showed that no system for mathematics could be both consistent and complete.

He did this by constructing a mathematical assertion that said – in effect: «This assertion can not be proved». A classic paradox. «This assertion can not be proved». Well either it can be proved or it can't. If it can be proved we have a contradiction, and the system is inconsistent. If it cannot be proved then the assertion is true – but it can't be proved; which means that the system is incomplete. It's a beautiful theorem, quite b-b-beautiful. Gödel theorem is the most beautiful thing I know. But the question of decidability was still unresolved. Hilbert had, as I said, thought there should be a single clearly defined method for deciding whether or not mathematical assertions were provable. The decision problem he called it. «The Entscheidungsproblem». In my paper on computer numbers I showed that there can be no one method that will work for all questions. Solving mathematical problems requires an infinite supply of new ideas. It was, of course, a monumental task to prove such a thing. One needed to examine the provability of all mathematical assertions past, present and future. How on earth could this be done? One word gave me the clue. People had been talking about the possibility of a mechanical method, a method that could be applied mechanically to solving mathematical problems without requiring any human intervention or ingenuity. Machine! – that was the crucial word. I conceived the idea of a machine, a Turing Machine, that would be able to scan mathematical symbols – to read them if you like – to read a mathematical assertion and to arrive at the verdict as to whether or not that assertion is provable. With this concept I was able to prove that Hilbert was wrong. My idea worked.

**Knox:** You actually built this machine?

**Turing:** No, of course not. It was a machine of the imagination, like one of Einstein's thought experiments. Building it wasn't important; it's a perfectly clear idea, after all.

**Knox:** Yes, I see; I don't, but I see something. I think. [*He looks at Turing*]. Forgive me for asking a crass and naive question – but what is the point of devising a machine that cannot be built in order to prove that there are certain mathematical statements that cannot be proved? Is there any practical value in all this?

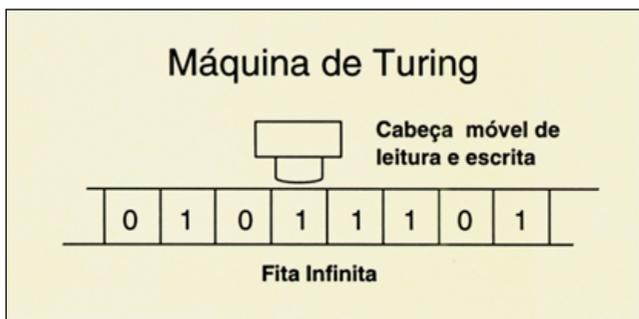
**Turing:** The possibilities are boundless – this is only the beginning. In my paper I explain how a special kind of Turing machine – I call it the Universal Machine – could carry out any mental process whatsoever.

---

normalmente designado por algoritmo, mais ou menos complexo, com suficiente robustez face a perturbações não controladas e que é possível repetir, dando origem aos mesmos resultados finais.

Por outro lado, um computador é uma máquina capaz de calcular todos os processos ou funções que sejam capazes de imaginar. Esta afirmação baseia-se na existência de um modelo teórico para a computação, construído por A. Turing em 1936, Quadro I.

Turing construiu uma máquina abstracta – máquina de Turing – constituída por uma fita infinita e uma cabeça móvel de leitura e de escrita. Na fita estão gravados caracteres, para simplificar, **0** e **1**, e que correspondem à informação inicial, Figura 3. A cabeça móvel desloca-se para a direita ou para a esquerda, lendo os caracteres inscritos na fita e alterando-os conforme o estado da cabeça de leitura.



**Fig. 3** – Uma Máquina de Turing é composta por uma fita infinita onde estão gravados caracteres e por uma cabeça móvel de leitura e escrita. Um programa para uma máquina de Turing é uma lista de estados para a cabeça móvel. Os caracteres inscritos na fita são as condições iniciais do programa. O resultado do programa é a sequência de caracteres inscritos na fita quando a cabeça móvel pára.

O conjunto possível de estados que a cabeça móvel de leitura pode tomar representa o programa ou algoritmo; o conjunto inicial de **00** e **11** é o estado inicial do programa; o estado final ou resultado do programa é atingido quando a cabeça de leitura pára, ficando registado na fita o resultado do cálculo. Com uma máquina de Turing é possível construir uma máquina de Turing universal (\*) capaz de calcular todos os algoritmos jamais inventados. É a esta construção que se designa como um modelo teórico para a computação.

O modelo de autómato celular introduzido na secção anterior, o autómato celular associado ao gás unidimensional, tem uma descrição facilmente implementável num programa para uma máquina de Turing. A rede unidimensional de moléculas do gás corresponde à fita da máquina de Turing, em que cada posição ou célula contém um símbolo que no autómato é representado por uma cor. Para cada actua-

lização de uma célula da fita a máquina realiza três tipos de movimentos: desloca-se para trás uma posição, desloca-se para a frente duas posições e desloca-se para trás uma posição. Como resultado, actualiza a célula de onde partiu com uma regra dependente do estado da cabeça móvel de leitura e escrita. Os estados da cabeça de leitura-escrita ou programa correspondem às 64 combinações possíveis de transições temporais da regra do autómato celular.

Voltando ainda ao exemplo da secção anterior, Figura 2 d), percebe-se facilmente que a evolução temporal de um autómato gera um padrão que, neste caso, é bastante dependente das condições iniciais. Analisando a evolução ao longo do tempo dos **00** e **11** de uma máquina de Turing, von Neumann percebeu que alguns blocos de caracteres inscritos na fita da máquina de Turing tinham a capacidade de se reproduzir: ao fim de várias passagens da cabeça da máquina, esses blocos de caracteres desapareciam para reaparecerem noutras posições da fita, depois de mais algumas passagens da cabeça de leitura-escrita. No início dos anos 50 von Neumann construiu um modelo teoricamente capaz de reproduzir formas simples. Mais tarde, nos anos 80, Wolfram e Conway introduziram uma linguagem simplificada para analisar a evolução dos autómatos celulares, levando à construção de um modelo a duas dimensões de uma máquina de computação universal. Esta abordagem constituiu, por outro lado, uma primeira tentativa de classificação de padrões universais (\*\*), nalguns casos muito semelhantes a padrões biológicos.

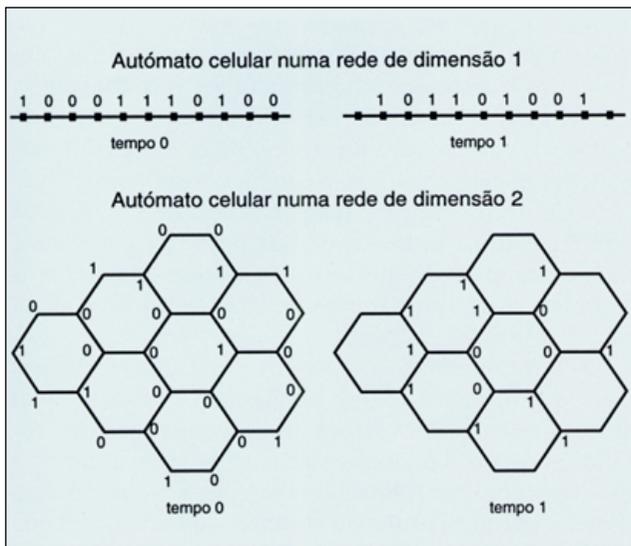
Antes de prosseguirmos, o leitor perguntar-se-á talvez, qual o objectivo de se obter todo este tipo de descrição formal. Para além da resposta fundamental que consiste na descoberta de padrões de comportamento universal em sistemas físicos e biológicos, existe o interesse mais pragmático em construir máquinas de cálculo, com grandes capacidades, cujo objectivo é simular eficientemente sistemas físicos e biológicos de grande complexidade.

### AUTÓMATOS CELULARES SIMPLES

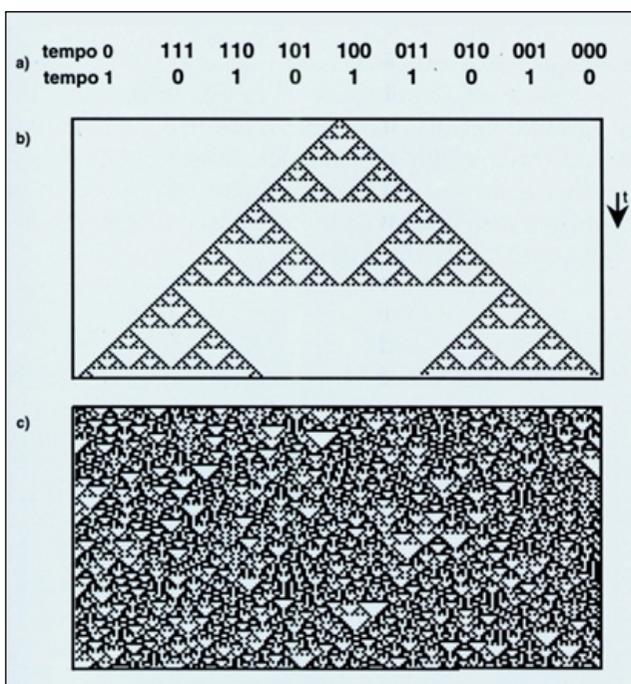
Um autómato celular é uma sequência de símbolos, distribuídos sobre os nós de uma rede a uma, duas ou mais dimensões, e que evoluem no tempo de acordo com uma regra ou programa. Os nós da rede comportam-se como caixas pretas cujo estado pode assumir um valor simbólico, independentemente da dinâmica interna das caixas. Por exemplo, podemos imaginar que o valor no nó de uma rede evolui ao longo do tempo para o valor obtido através da soma booleana dos valores nos nós vizinhos. (Soma booleana:  $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 1 = 0$ ).

(\*) Uma máquina de Turing universal é uma máquina de Turing capaz de simular qualquer programa para uma máquina de Turing, parando se o programa contém um algoritmo decidível.

(\*\*) Uma propriedade é universal para uma classe de objectos quando não depende das características individuais dos elementos da classe.



**Fig. 4** – Evolução de um autómato celular numa rede de dimensão 1 e numa rede de dimensão 2 com simetria hexagonal. A regra de interacção é a mesma para os dois autómatos: o estado de cada nó no tempo 1 só depende dos estados nos nós vizinhos no tempo 0.



**Fig. 5** – Evolução de um autómato celular numa rede de dimensão 1. a) Lei de transição temporal (soma booleana). b) Evolução a partir do estado ..0001000.. c) Evolução a partir de um estado aleatório.

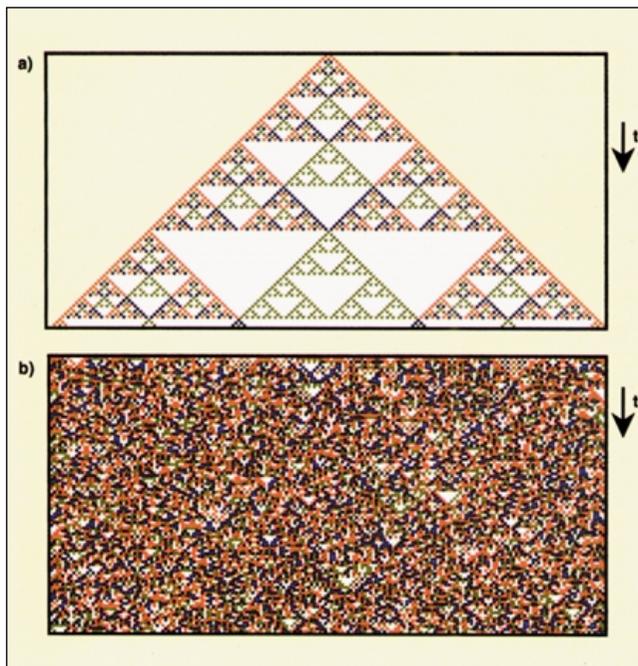
Na Figura 4 estão representados dois autómatos celulares em redes de dimensão 1 e 2. Na rede da esquerda e no tempo zero, cada nó contém um número - uma unidade de informação ou símbolo - que pode evoluir ao longo do tempo. Na rede da direita cada nó contém um número calculado através dos valores nos nós vizinhos no tempo 0. A rede da direita está no tempo 1 quando todos os nós da rede estão actualizados. De facto, quando a rede é infinita e

como o processo de actualização de cada nó é finito, a passagem do tempo zero ao tempo um demora um tempo infinito. No entanto, pode-se sempre pensar que a rede é finita mas arbitrariamente grande, de maneira que as fronteiras estão sempre longe da nossa observação. Esta passagem, de uma rede finita para uma rede infinita não altera o que queremos estudar, simplificando a descrição formal do problema. Por outro lado, o facto de se considerar que a actualização das redes, do tempo zero para o tempo um, é feita num tempo finito, corresponde a um certo grau de simultaneidade na actualização. Assim, pode-se imaginar que o processo de actualização é feito paralelamente em subredes de dimensão também infinita. Nesta formulação, os autómatos celulares aparecem como modelos de computação intrinsecamente paralelos.

Mas voltemos aos autómatos em redes unidimensionais. Podemos agora considerar todas as leis possíveis de transição no tempo, em que o estado de cada célula, num certo instante, depende apenas dos estados das células vizinhas no instante anterior. Supondo que cada nó ou célula só pode tomar os valores **0** ou **1**, existem precisamente 256 regras de autómatos celulares. Para exemplificar como se representa a evolução temporal de um autómato celular, analisemos a regra da Figura 4. Neste caso, cada nó evolui no tempo para o valor da soma booleana dos estados nos dois nós vizinhos. Na Figura 5 a) estão representados todos os estados possíveis que cada grupo de três células consecutivas pode tomar. O autómato celular está assim completamente definido pelas suas leis locais de evolução. Na Figura 5 b) está representada a evolução deste autómato partindo de uma condição inicial em que todos os nós estão no estado **0** e apenas uma célula está no estado excitado **1**. A Figura 5 c) representa a evolução a partir de um estado desordenado. Reconhece-se, na Figura 5 c), que o padrão inicial desordenado evolui no espaço-tempo com regularidades bem marcadas devido às estruturas triangulares que desaparecem e reaparecem noutras regiões, eventualmente com dimensões diferentes.

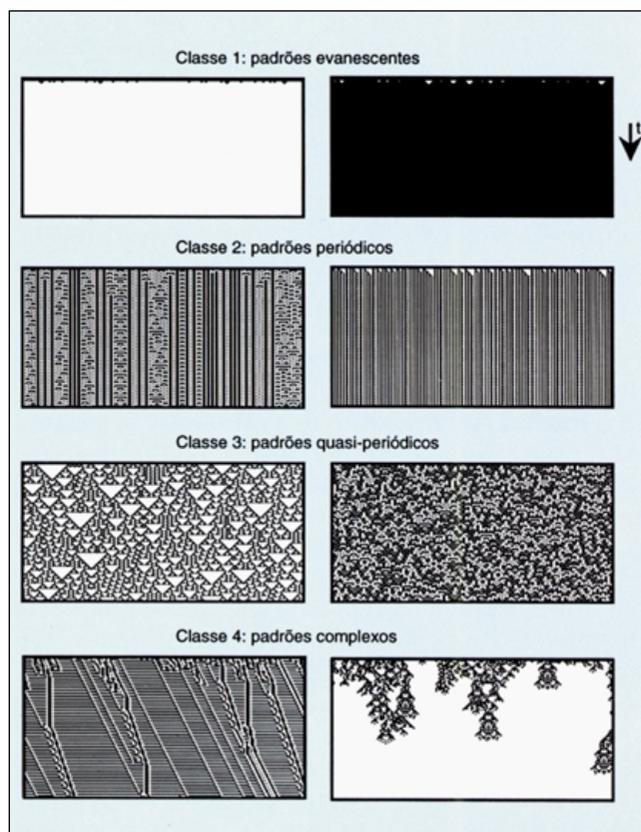
Este autómato celular simples evolui para estados com propriedades de semelhança, embora as condições iniciais sejam aleatórias. Pode-se então perguntar se todos os autómatos celulares unidimensionais apresentam esta propriedade de semelhança espacio-temporal e quais as diferentes tipologias de padrões. Quando se varia o número de estados possíveis de uma rede, será que se mantém o mesmo tipo de padrões?

A última pergunta tem uma resposta simples para algumas classes de autómatos celulares e pode ser testada numa simulação numérica. Para uma regra do tipo soma booleana em que os estados das células podem tomar quatro valores diferentes, obtêm-se os padrões da Figura 6. Como se vê, existe uma sobreposição aditiva de padrões, não se gerando padrões mais complexos. Assim, de facto, todo o comportamento que queremos descrever está contido nos modelos mais simples com células a dois estados.



**Fig. 6** – Evolução de um autômato celular numa rede de dimensão 1. Cada célula pode tomar os valores 0 (branco), 1 (vermelho), 2 (verde) e 3 (azul).

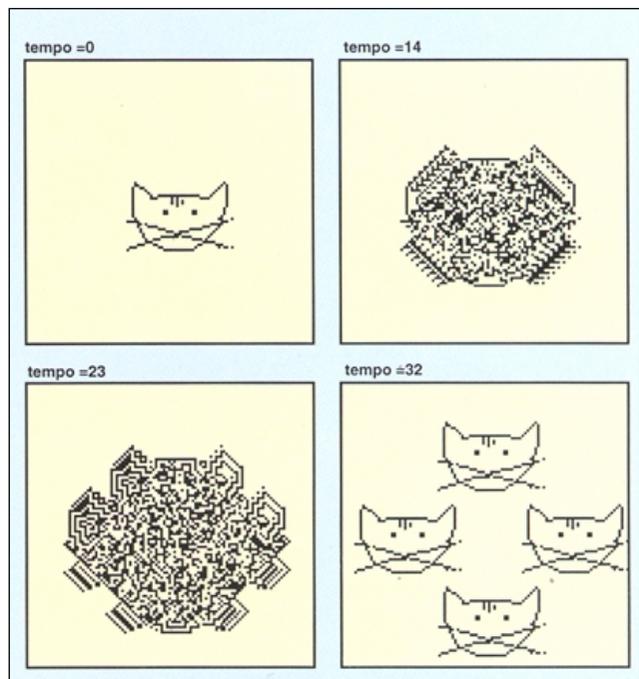
O estado de cada célula, no tempo 1, depende apenas dos estados nas células vizinhas no tempo 0 (soma do tipo booleana  $1 + 3 = 2 + 2 = 0$ ,  $3 + 2 = 1$ ,  $3 + 3 = 2$ ). a) Evolução a partir do estado ..0001000... b) Evolução a partir de um estado desordenado.



**Fig. 7** – Classes de padrões espacio-temporais de autômatos celulares em redes de dimensão 1.

Para responder à questão dos vários tipos de padrões possíveis para autômatos a dois estados, fizeram-se várias simulações em computador e conhecem-se apenas quatro classes de padrões (classes universais de padrões): padrões evanescentes, padrões periódicos, padrões quasi-periódicos e padrões complexos, Figura 7. Contudo, a formulação analítica deste problema tem escapado a todas as tentativas de sistematização, da mesma maneira que os padrões dos escoamentos turbulentos ou dos sistemas biológicos não têm ainda uma explicação coerente.

Referimos anteriormente que as estruturas triangulares do autômato celular da Figura 5 correspondem a uma tipologia de padrões no espaço-tempo. No entanto não apresentámos evidência simples deste tipo de comportamento. Considerando um autômato a duas dimensões, numa rede de simetria quadrada, em que a regra de interacção entre vizinhos é a soma booleana dos estados dos vizinhos mais próximos, podemos seguir ao longo do tempo a evolução de um padrão. Para surpresa nossa, esse padrão é destruído, voltando a reaparecer noutras posições da rede em duplicado, quadruplicado, etc.. Na Figura 8 apresenta-se a evolução deste autômato em que se escolheu como condição inicial o contorno da cabeça de um gato. Este autômato celular é de facto o modelo mais simples de um sistema com a capacidade de se reproduzir. Espantosamente, este autômato celular está associado ao problema matemático da multiplicação de polinómios com coeficientes inteiros.



**Fig. 8** – Autômato celular numa rede de dimensão 2 com simetria quadrada. O estado de um nó da rede no tempo 1 é obtido através da soma booleana dos estados dos nós vizinhos no tempo 0. Este autômato exemplifica um tipo de lei com a possibilidade de reproduzir padrões.

## Escoamento de fluidos

Mas os modelos de autómatos celulares podem também servir para a simulação em tempo real de sistemas físicos. Vamos ver um modelo para a simulação do escoamento bidimensional de um fluido num recipiente de forma arbitrária, que pode ser um contentor, um rio ou um estuário.

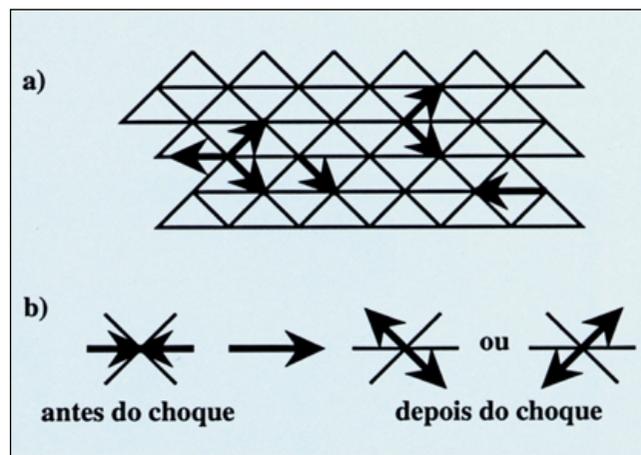
Podemos considerar uma rede bidimensional de simetria triangular em que em cada ponto da rede podem estar até 6 partículas de massas iguais e com velocidades apontadas nas direcções definidas pelas ligações com os nós vizinhos, Figura 9 a). As partículas deslocam-se ao longo das ligações durante um tempo constante e podem colidir com outras partículas que chegam aos nós. Por exemplo, quando se têm uma colisão frontal de duas partículas, o resultado final da interacção é compatível com duas direcções possíveis de saída, Figura 9 b). Neste caso podemos escolher aleatoriamente o resultado da colisão.

Implementando esta regra de autómato celular na rede bidimensional e impondo condições fronteira (choque com paredes) de inversão do sentido da velocidade, está-se a simular o escoamento de um fluido ou de um gás a duas dimensões. Como neste caso os observáveis macroscópicos são a velocidade e a densidade local de partículas, podem-se calcular os valores médios do número de partículas e das velocidades em subredes de dimensões mais pequenas.

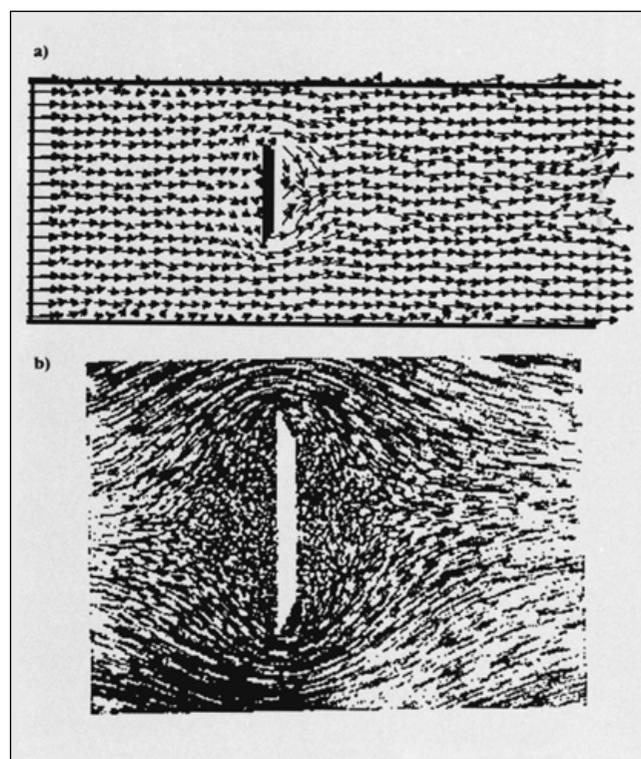
Na Figura 10 estão representados os valores médios das velocidades no escoamento de um fluido contra uma barreira, calculado com este modelo de autómato celular. Na Figura 10 b) apresenta-se uma imagem obtida experimentalmente de um fluxo contra um obstáculo. Como se vê, o fluxo calculado pelo autómato celular apresenta as mesmas características que o sistema real. É precisamente devido a este tipo de semelhança que se pensa que os autómatos celulares poderão ajudar a explicar os mecanismos físicos que originam a turbulência. Neste caso simples, é possível construir computadores especialmente dedicados para o cálculo rápido do autómato celular, tendo-se portanto uma poderosa ferramenta para a simulação em tempo real do escoamento de fluidos em regiões de forma arbitrária.

Construiu-se um programa especialmente dedicado para a simulação deste autómato celular em que se pode simular, por exemplo, o escoamento de um fluido num estuário. Na Figura 11 apresenta-se o resultado de uma simulação para o estuário do Tejo, em que se introduziu como dado a imagem do estuário vista por um satélite. Com esta técnica de autómatos celulares pode-se ainda seguir a dispersão de uma mancha de poluente através da marcação de algumas partículas, Figura 12.

Comparando esta regra de autómato celular com a introduzida anteriormente para a simulação de um gás unidimensional conclui-se que as simulações de es-



**Fig. 9** – a) Rede bidimensional com simetria triangular. Cada seta indica o sentido do movimento de uma partícula de velocidade constante. Cada nó pode estar ocupado, no máximo, por 6 partículas, existindo  $2^6=64$  estados possíveis por nó. b) Numa situação de choque escolhe-se aleatoriamente uma das duas transições possíveis.



**Fig. 10** – a) Escoamento de um fluido contra uma barreira, calculado com um autómato celular numa rede de simetria triangular. b) Fotografia experimental de um escoamento real.

coamentos de fluidos assim obtidas são mais realistas. Isto foi conseguido à custa do aumento da dimensão da rede celular e da introdução de regras de colisão compatíveis com o facto das partículas terem dimensões pontuais.

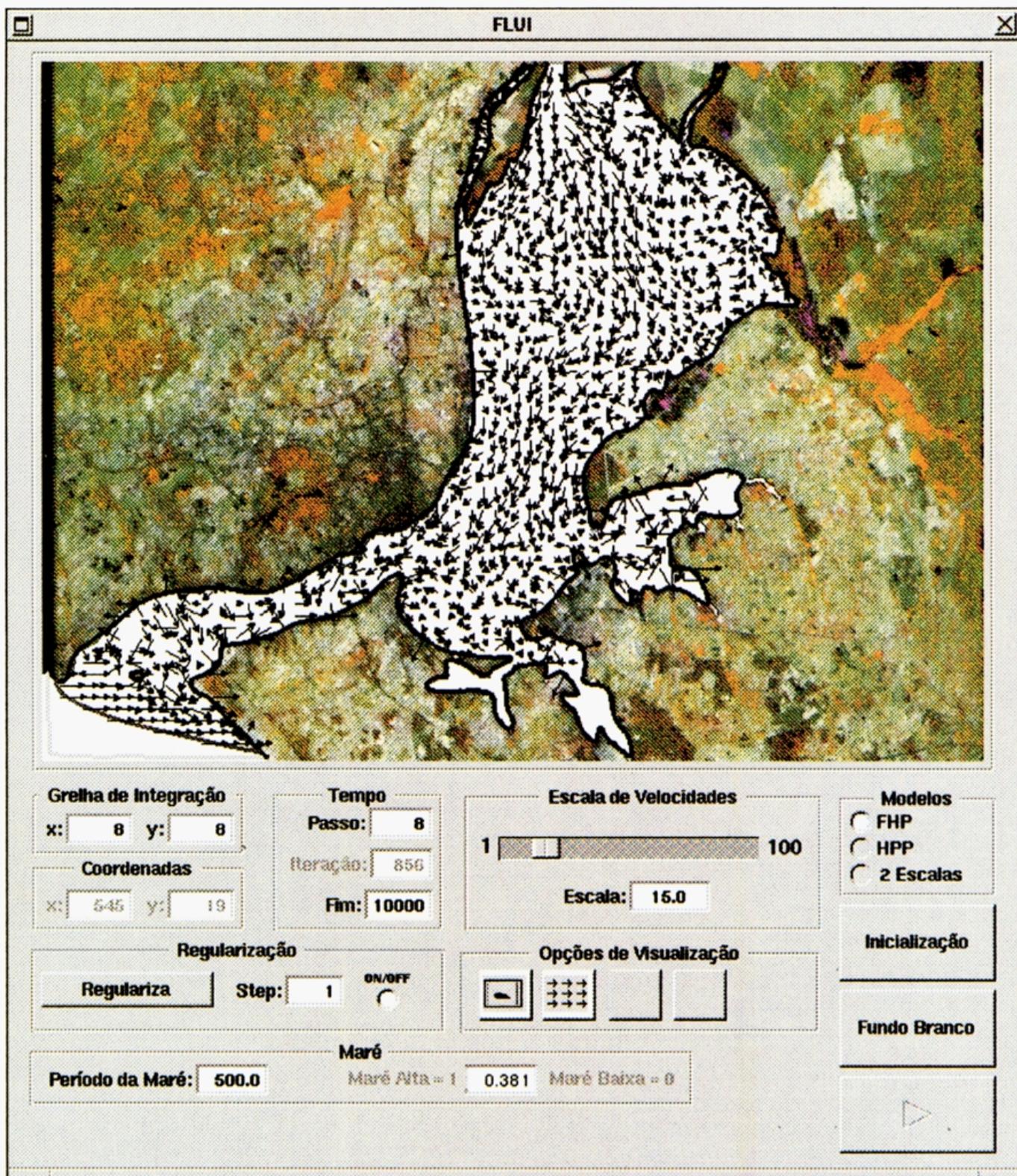
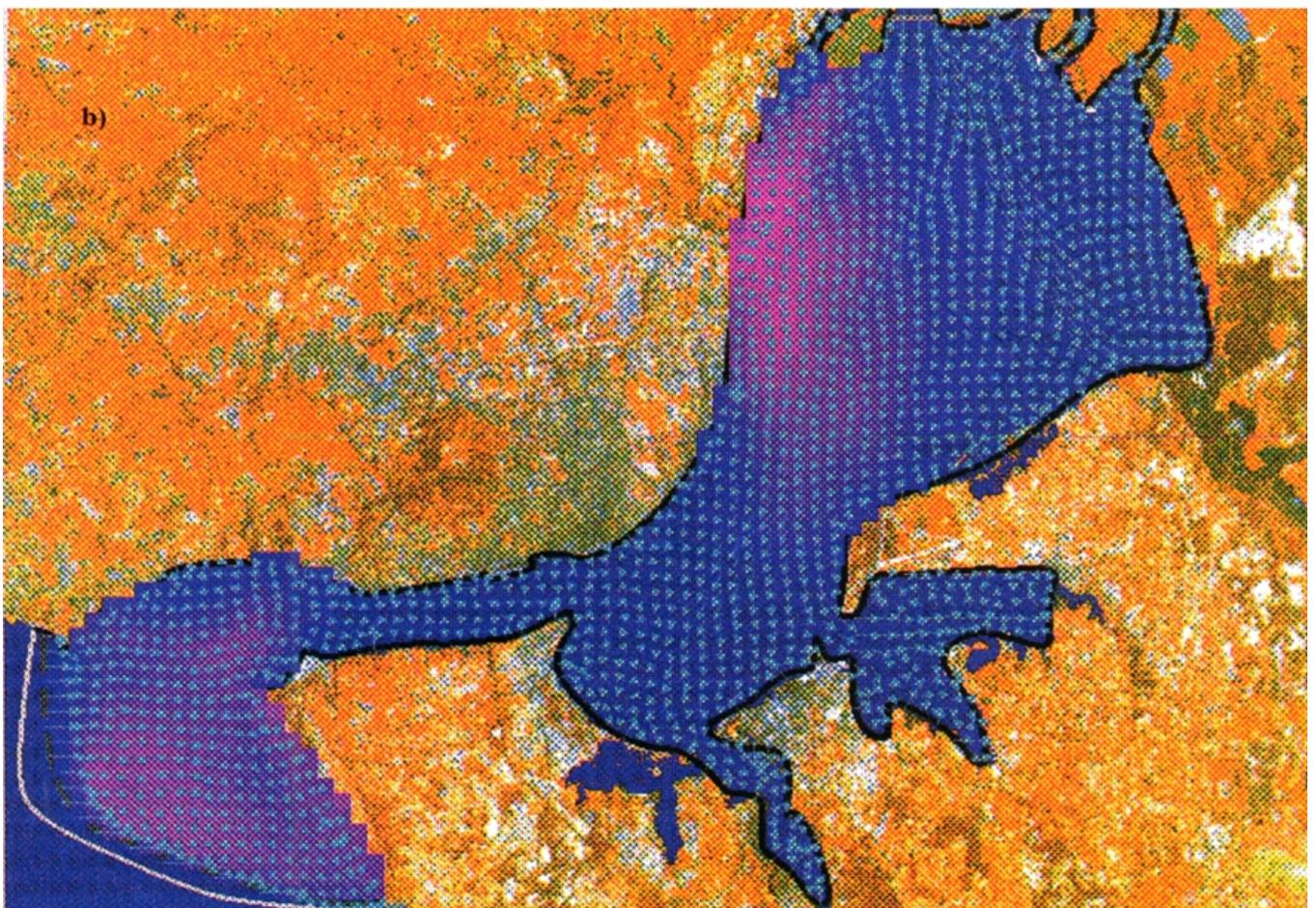
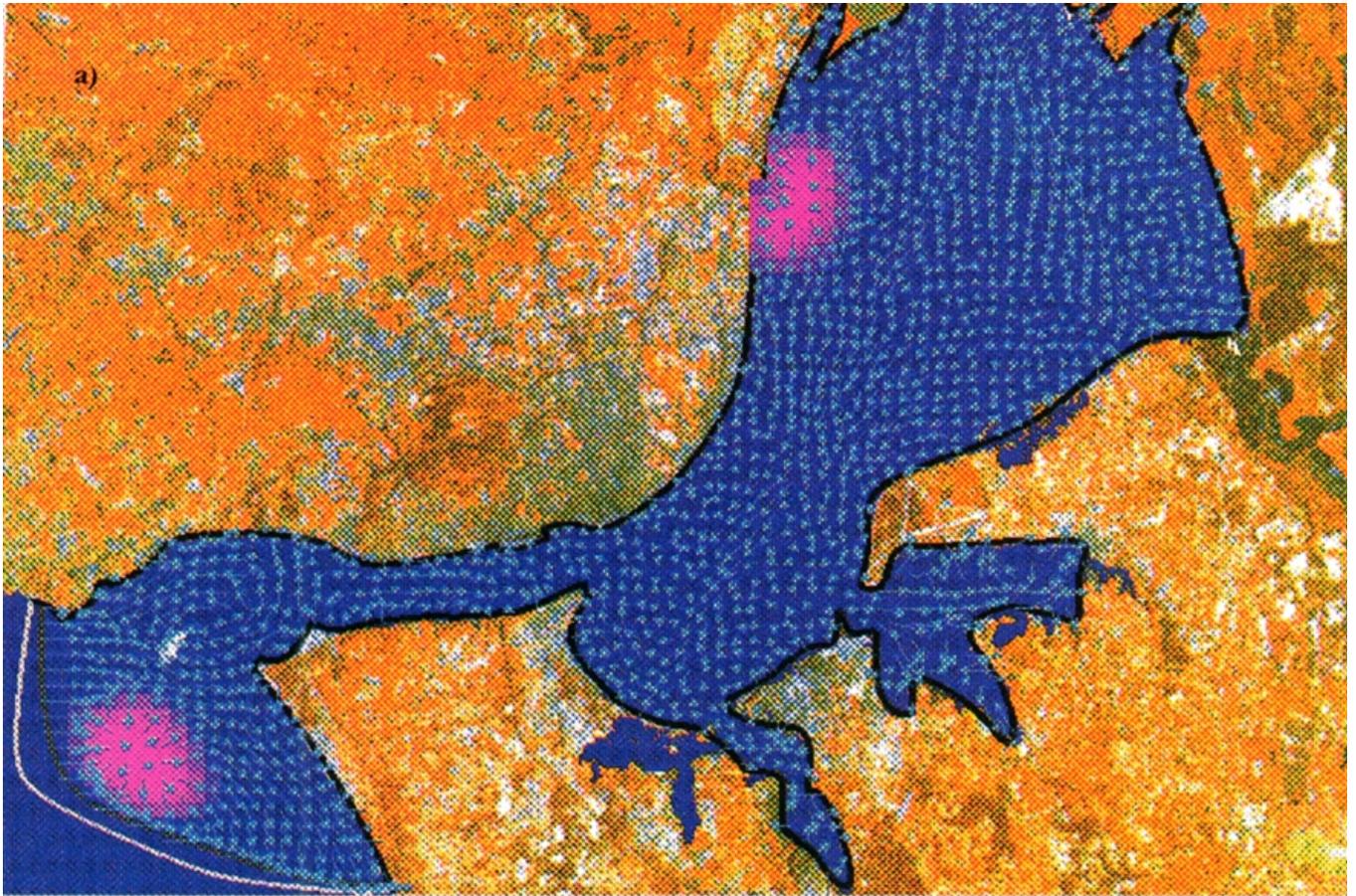


Fig. 11 – Simulador de escoamento de fluidos em regiões de forma arbitrária. Na Figura apresenta-se o resultado de uma simulação para o estuário do Tejo.



**Fig. 12** - Simulador de escoamento de fluidos em regiões de forma arbitrária. Na figura a) apresenta-se o resultado de uma simulação para o estuário do Tejo em que se marcaram a vermelho duas manchas de poluente. Na figura b) está representada a evolução, ao fim de algum tempo, das manchas de poluente. A intensidade da cor é proporcional à concentração de poluente.

## Fogos

Vamos agora construir um autómato celular simples para simular a propagação de um fogo numa floresta.

A propagação de um fogo numa floresta depende de vários factores: da proximidade das árvores, do tipo de árvores e do seu comportamento na combustão, ou seja, da quantidade de calor libertado, das condições climáticas durante o fogo e dos efeitos turbulentos gerados pela convecção de ar quente e frio. Do ponto de vista estritamente analítico é muito difícil descrever todos estes efeitos num sistema de equações. No entanto, é fácil construir um modelo de autómato celular para termos uma ideia de como se processa a propagação e evolução de um fogo numa floresta.

Vamos então considerar uma rede bidimensional com simetria quadrada e em cada nó da rede representamos o estado de uma árvore. Assim, podemos assumir que o estado associado à cor verde representa uma árvore sã, à cor vermelha uma árvore a arder e à cor preta uma árvore queimada. As árvores a arder – estado vermelho – mantêm-se nesse estado durante um tempo finito. A regra de evolução do autómato celular é determinada de acordo com as seguintes leis de interacção: se num certo instante uma célula está no estado verde (árvore sã) e uma das células vizinhas está no estado vermelho (árvore a arder), existe uma probabilidade não nula de no instante seguinte a célula mudar para o estado vermelho. Se existir vento numa

certa direcção a probabilidade de transição verde  $\rightarrow$  vermelho é maior nessa direcção. Quando uma célula está no estado vermelho, ela vai manter-se neste estado durante um tempo finito. Se um nó da rede está no estado preto (árvore queimada), então manter-se-á nesse estado indefinidamente.

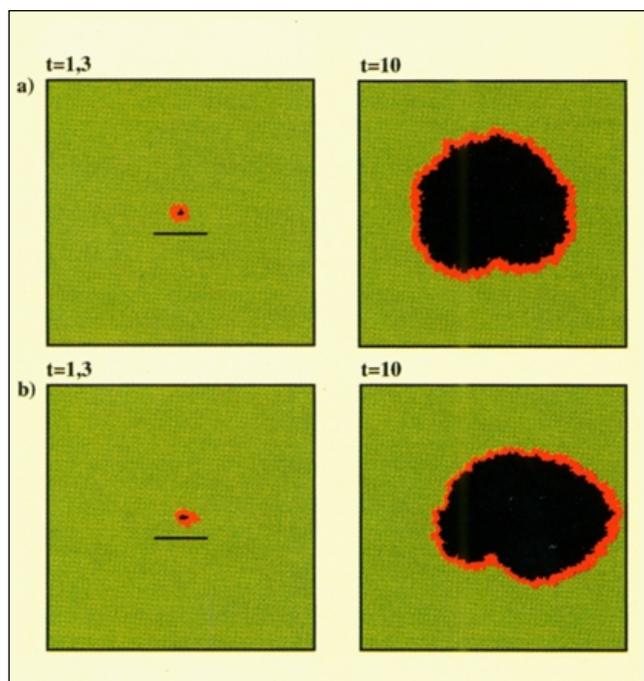
Na Figura 13 está representada a evolução de um fogo numa região com 40 000 árvores, em que, inicialmente (tempo 0), estavam três árvores a arder. Designando por  $t_a$  o tempo que cada árvore demora a arder e por  $t_u$  o tempo de evolução do autómato celular, o tempo de evolução do sistema é  $t = t_u/t_a$ . Na Figura 13, foram calculadas as evoluções deste sistema para os tempos  $t = 1,3$  e  $t = 10$ . Fizeram-se duas simulações correspondentes a uma situação sem vento (Figura 13 a) e com vento na direcção oeste-este (Figura 13 b).

Este modelo, muito simplificado, mostra claramente as possibilidades de aplicações de modelos de autómatos celulares para a previsão da evolução temporal de sistemas em tempo real. Podem-se construir máquinas de computação para o cálculo rápido da evolução destes sistemas e portanto definir estratégias de combate a incêndios reais. Um modelo um pouco mais sofisticado poderia incluir, por exemplo, a não homogeneidade de espécies vegetais e da sua distribuição.

## Máquinas de computação universal e jogo da vida

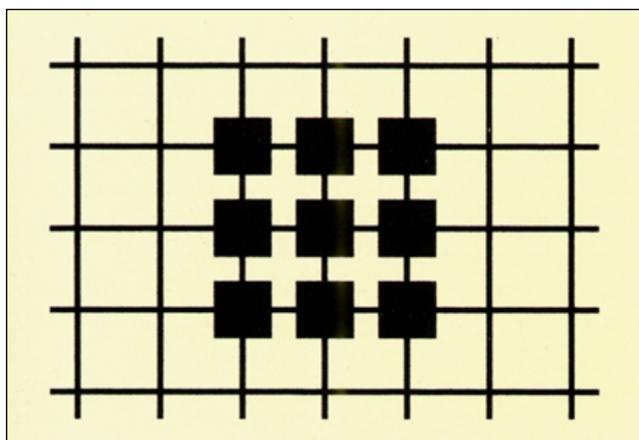
Viu-se, anteriormente, a semelhança entre um programa para uma máquina de Turing – máquina de computação universal – e o programa para o cálculo da evolução do autómato celular associado ao gás unidimensional. Contudo, todos os autómatos que temos vindo a construir, com propriedades interessantes do ponto de vista das aplicações a sistemas reais, foram construídos em redes celulares de dimensão 2 e pouco adaptados a uma programação sequencial como é o caso da máquina de Turing. Por outro lado, a regra que define a evolução de um autómato celular é estabelecida localmente e é uniforme, isto é, é a mesma para todos os pontos da rede. Como se viu, o estado da cabeça móvel de leitura-escrita da máquina de Turing pode variar, quando esta se desloca para outras posições da fita. Pode-se perguntar agora qual a possibilidade de construir um modelo de computação universal com o mesmo tipo de estrutura que um autómato celular. Por outras palavras, existirá uma regra local de autómato celular, bem determinada, e que se comporte como uma máquina de computação universal? A resposta a esta pergunta é afirmativa e o autómato celular com esta propriedade, descoberto por J. Conway, é designado por jogo da vida.

Considera-se uma rede bidimensional infinita com simetria quadrada e cada nó da rede pode tomar ape-



**Fig. 13** – Evolução de um autómato celular que simula a propagação de um fogo numa floresta. A frente do fogo está representada a vermelho e as árvores queimadas estão representadas a negro. A figura a) foi calculada para uma situação sem vento e a figura b) para uma situação com vento no sentido oeste-este.

nas os valores **0** – células mortas – ou **1** – células vivas. Assume-se ainda que cada nó tem oito vizinhos, os quatro mais próximos e os quatro nas diagonais, Figura 14.

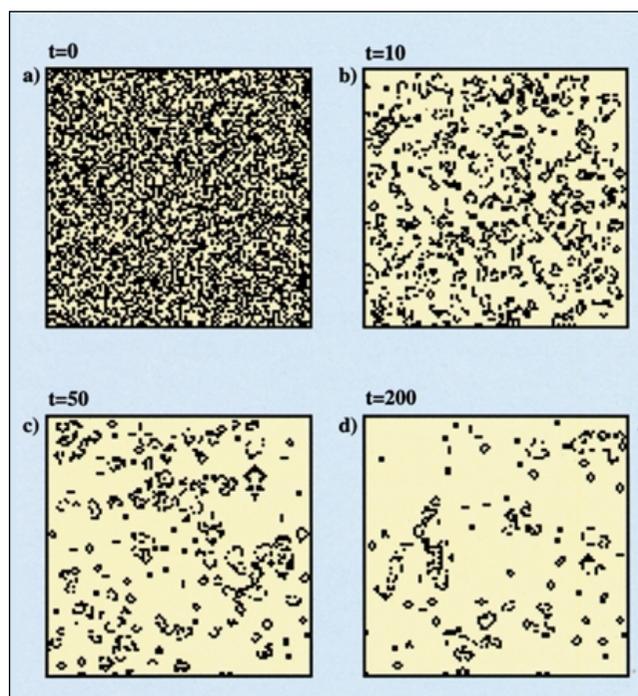


**Fig. 14** - Relação de vizinhança para o autômato Jogo da Vida. Cada célula tem oito vizinhos, como se indica na figura.

Vamos agora definir a regra de evolução do jogo da vida:

1. Se no instante  $t=0$  uma célula está morta (estado 0) e se existem exactamente três células vizinhas vivas (estado 1) então, no instante  $t=1$ , a célula central fica no estado 1 (nascimento).
2. Se no instante  $t=0$  uma célula está viva (estado 1) e se existem quatro ou mais células vizinhas vivas (estado 1) então, no instante  $t=1$ , a célula fica no estado 0 (morte por excesso de população).
3. Se no instante  $t=0$  uma célula está viva (estado 1) e se existe apenas uma célula vizinha viva ou nenhuma (estado 1) então, no instante  $t=1$ , a célula central fica no estado 0 (morte por isolamento).
4. Se no instante  $t=0$  uma célula está viva (estado 1) e se existem apenas duas ou três células vizinhas vivas (estado 1) então, no instante  $t=1$ , a célula central mantém-se no estado 1 (sobrevivência).

Com este autômato celular pode-se calcular a evolução de uma configuração inicial aleatória. Na Figura 15 a) está representada uma configuração inicial aleatória (instante  $t=0$ ) de elementos vivos – estado 1. Nas Figuras 15 b) - 15 d) estão representadas as configurações a que se chega em tempos posteriores. Como se vê, depois de algumas iterações, formam-se estruturas localizadas, que nalguns casos oscilam periodicamente. O resultado final da evolução do jogo da vida é quase sempre constituído por estruturas localizadas que, nalguns casos, oscilam periodicamente ao longo do tempo – talvez por este motivo, J. Conway designou este autômato por jogo da vida.

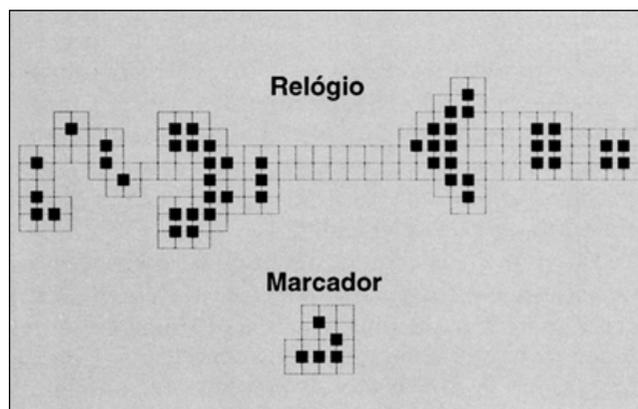


**Fig. 15** – Evolução do autômato Jogo da Vida a partir de uma configuração inicial aleatória (tempo = 0). Ao fim de algumas iterações do autômato obtêm-se configurações locais estáveis ou oscilantes.

Vejam agora quais as características do jogo da vida que nos permitem afirmar que este autômato celular tem a capacidade de computação universal. Existem duas configurações iniciais localizadas que vamos designar por **marcador** e **relógio** (Figura 16) e que têm as seguintes propriedades:

#### **Propriedades do marcador:**

1. Por cada quatro iterações da regra do jogo da vida, um marcador desloca-se uma posição na diagonal da rede.



**Fig. 16** – Configurações do tipo Relógio e Marcador para o autômato Jogo da Vida. Os quadrados a negro indicam que o estado nesse nó da rede toma o valor 1. Construindo configurações iniciais a partir das duas estruturas locais indicadas, é possível construir uma máquina de computação universal.

- Quando dois marcadores chocam, ao fim de quatro iterações da regra do jogo da vida, os marcadores desaparecem.

**Propriedades do relógio:**

- Por cada trinta iterações da regra do jogo da vida, um relógio produz um marcador.

Devido a estas propriedades, é possível construir um computador, isto é, é possível escolher posições de relógios e marcadores na rede celular que correspondem a qualquer cálculo que queiramos efectuar. Isto é possível porque se pode construir configurações de **relógios** e **marcadores** que calculam todas as operações lógicas fundamentais (**não**, **e** e **ou**). Na Figura 17, apresentamos o exemplo do cálculo da negação de um número. Neste caso, introduzimos como dado inicial o número (escrito em notação binária)

10100 ...

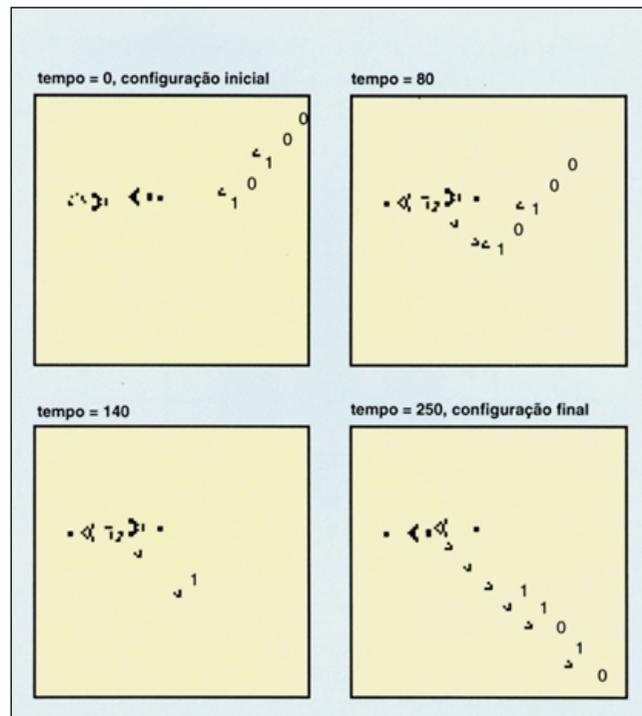
e o resultado da negação é

$$\text{não (10100...)} = 01011...$$

Com um dispositivo adequado para introdução de configurações na rede do autómato e um dispositivo para leitura de dados, é possível construir um computador com uma arquitectura de autómato celular. Claro está que os problemas, tanto técnicos como teóricos, para a construção de um computador deste tipo são grandes (\*). No entanto, a possibilidade conceptual está demonstrada.

Comparando esta construção de um modelo de computação com a máquina de Turing, encontramos uma diferença essencial: na máquina de Turing um programa está localizado na descrição dos estados da cabeça móvel de leitura-escrita e os dados são introduzidos na fita ou rede celular. No jogo da vida, a regra de evolução é sempre a mesma e uniforme em todos os pontos da rede e os dados correspondem a configurações espaciais distribuídas sobre a rede. Assim, dar um algoritmo de cálculo é equivalente à escolha de posições de **relógios** e **marcadores** sobre a rede celular infinita, ou seja, à própria marcação de condições iniciais adequadas.

Talvez o leitor entenda agora quais as razões porque se suspeita, como foi dito na introdução, que a natureza aparece como uma máquina de cálculo gigante, e que, provavelmente, muitos sistemas físicos e biológicos têm a propriedade de computação universal.



**Fig. 17** – Configuração para o cálculo da operação lógica **não**, através do autómato celular jogo da vida. Estão representadas na figura a configuração inicial, duas configurações intermédias e a configuração final. Para simplificar a leitura das figuras, sobreposaram-se à rede celular os valores das configurações inicial, intermédia e final.

Um modelo de computação universal baseado numa estrutura de autómatos está mais próximo da arquitectura cerebral dos seres vivos, pois o suporte da informação são os neurónios e as leis de interacção são locais e mediadas pelas conexões entre células vizinhas. As capacidades de computação (universal) dos seres vivos estariam então associadas à estrutura, extensão e quantidade das ligações.

Pensa-se que esta conjectura é verdadeira para sistemas físicos e biológicos com comportamento turbulento, isto é, sistemas cujas propriedades observáveis são influenciadas por dinâmicas a todas as escalas (escala microscópica, escalas intermédias e escala macroscópica). Por outro lado, e voltando aos comentários iniciais deste artigo sobre o cérebro, a possibilidade de se poder construir um computador sobre uma estrutura celular abre perspectivas imensas sobre as possibilidades computacionais dos seres biológicos. E isto é fascinante.

**REDES DE FUNÇÕES ACOPLADAS**

O passo seguinte na generalização do conceito de autómato celular consiste em considerar que as caixas negras da rede celular podem assumir um grande número de estados, de maneira a podermos descrever os seus valores por números reais. Como a rede celular

(\*) De facto, no estado actual da tecnologia, os problemas de hardware são facilmente ultrapassados. O grande problema reside na construção de uma linguagem eficiente, do ponto de vista do utilizador, para a comunicação com um sistema deste tipo.

é formada por células idênticas, podemos assumir que o estado de cada célula varia ao longo do tempo através de uma lei definida por uma função local, em geral não-linear. Se representarmos por  $x$  o estado de uma célula num instante  $t$ , no instante seguinte  $t+1$ , o estado da célula vai tomar o valor  $f(x)$  e, no instante  $t+2$ , o estado da célula vai ser  $f(f(x))$ , etc. (\*). Tem-se então uma rede de funções acopladas.

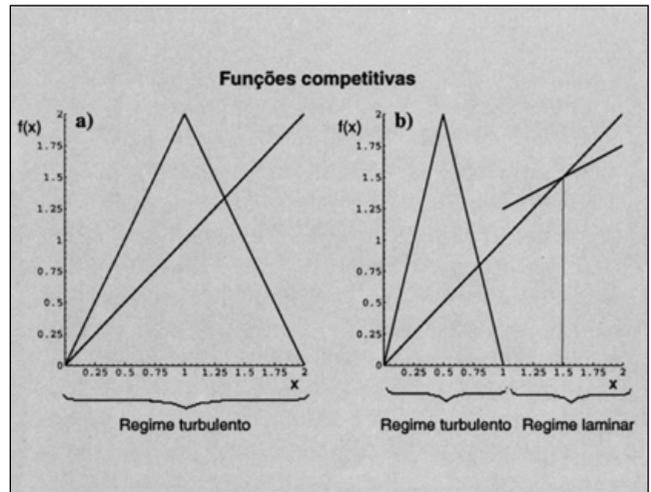
Restringindo a nossa análise a redes celulares unidimensionais e representando o estado da caixa negra ou célula número  $i$ , no instante  $t$ , por  $x_i^t$ , no instante seguinte,  $t+1$ , o estado da célula  $i$  vai depender, por um lado, do seu comportamento dinâmico definido por uma função local  $f$ , por outro, das interações com as células vizinhas. Assim, considerando que o estado de cada célula, do instante  $t$  para  $t+1$ , se altera de acordo com a lei determinista descrita pela função  $f$  e que a interação com os vizinhos mais próximos é proporcional ao valor médio dos estados vizinhos, podemos escrever

$$x_i^{t+1} = (1-\mu) f(x_i^t) + \frac{\mu}{2} (f(x_{i-1}^t) + f(x_{i+1}^t))$$

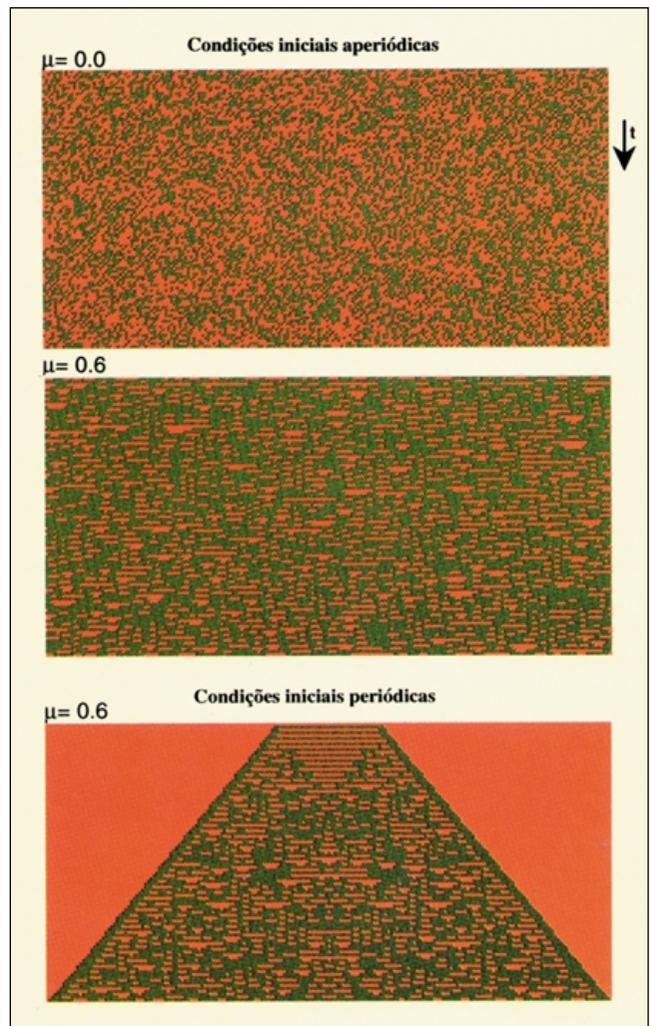
em que  $\mu$  é um parâmetro que mede a intensidade da interação com vizinhos mais próximos. Se  $\mu = 0$ , a evolução de cada célula é independente. Se  $\mu = 0,5$ , a evolução de uma célula é igual ao valor médio do seu estado com os estados das células vizinhas e se  $\mu = 1$  o seu estado só depende dos valores nas células vizinhas.

Para calcular a evolução de uma rede de funções acopladas deste tipo, é importante fazer uma escolha adequada da função  $f$ . A função não-linear mais simples tem um comportamento linear para pequenos valores dos estados das células, favorecendo o crescimento dos valores nas células em instantes consecutivos. Para valores grandes dos estados das células atinge-se um estado de saturação a partir do qual os valores numéricos dos estados são forçados a decrescer linearmente – funções competitivas. Na Figura 18 estão representadas duas funções com esse tipo de comportamento. Na Figura 18 b) representa-se uma função com comportamento competitivo na região  $x \leq 1$  enquanto que, para valores dos estados  $x > 1$ , a função é linear favorecendo um estado bem determinado em  $x = 1,5$ . Neste caso, se  $x_i^t > 1$ , em instantes posteriores  $t' > t$  o valor de  $x_i^{t'}$  aproxima-se rapidamente de 1,5 (\*\*).

Podemos agora analisar, em função do parâmetro de interação  $\mu$ , a evolução temporal da estrutura celular para a função da Figura 18 a). Na Figura 19 está representada a evolução temporal da rede de funções acopladas numa rede de 200 células com condições fronteira periódicas, partindo de configurações iniciais



**Fig. 18** – Funções de teste para o cálculo de um autômato celular numa rede de funções acopladas. Para melhor leitura das coordenadas, marcaram-se nos gráficos as linhas  $f(x) = x$  e, na figura b), o ponto  $x = 1,5$  caracteriza os estados estacionários das células de uma rede de funções acopladas.



**Fig. 19** – Evolução temporal de uma rede de funções acopladas, para a função da figura 18 a). O parâmetro  $\mu$  mede a intensidade do acoplamento entre células vizinhas. A cor verde corresponde ao regime turbulento  $x < 1$  e a cor vermelha ao regime turbulento  $x > 1$ .

(\*) Este processo dinâmico de, a partir de um número  $x$ , calcular os valores  $f(x), f(f(x)), f(f(f(x))) \dots$ , designa-se por iteração.

(\*\*) O ponto  $x = 1,5$  é um ponto fixo estável da função  $f$ .

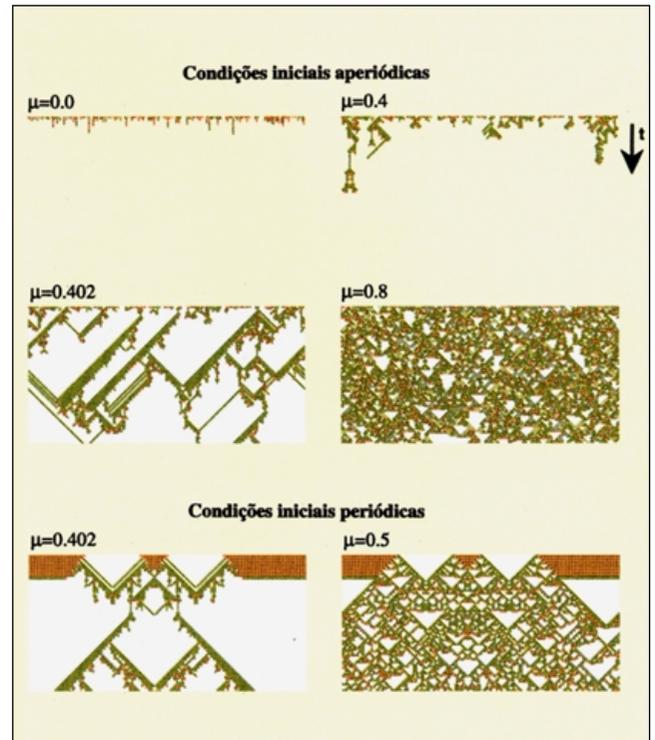
aleatórias e periódicas. Vejamos então como interpretar estas figuras.

A função da Figura 18 a) tem um comportamento não-linear para as iterações pois, iterando um ponto genérico do intervalo da definição da função, esse ponto não converge para nenhum valor, passeando-se aleatoriamente por todos os valores possíveis que o estado de uma célula pode tomar. Diz-se então que a função  $f$  é caótica e que o intervalo onde está definida a função  $f$  corresponde a um regime turbulento. Assim, se o parâmetro de interacção da rede de funções acopladas é nulo, é de esperar que os estados da rede oscilem aleatoriamente com valores compreendidos entre 0 e 2. Na Figura 19, para representar este comportamento, a cor verde refere-se a estados turbulentos com valores  $x < 1$  e, a cor vermelha, a estados turbulentos com  $x > 1$ . De facto, para  $\mu = 0$ , a sequência dos valores das células é completamente desordenada, como o previsto pela propriedade de caoticidade da função  $f$ . No entanto, quando o parâmetro  $\mu$  é maior que zero, o estado inicial aleatório da rede começa a organizar-se atingindo-se um estado quasi-periódico semelhante ao padrão do autómato celular da Figura 5 e aos padrões quasi-periódicos da Figura 7. Neste exemplo, as interacções entre elementos individuais cooperam para formar um padrão mais organizado, embora a dinâmica individual das células, descrita pela função competitiva  $f(x)$ , seja aleatória.

Este exemplo, mostra bem a importância das interacções no estabelecimento das propriedades colectivas de sistemas com um grande número de componentes.

Outro exemplo de rede de funções acopladas pode ser obtido através da função representada na Figura 18 b). Neste caso, juntou-se aos estados turbulentos da função  $f$ ,  $x < 1$ , um regime estacionário ou laminar ( $x > 1$ ). Na Figura 20 apresenta-se a evolução da rede de funções acopladas com competição entre o regime turbulento e o regime laminar. Para pequenos valores do parâmetro de interacção, uma condição inicial aleatória ou periódica converge ao longo do tempo para o valor do estado estacionário ou laminar a que corresponde o valor  $x = 1,5$ , representado a branco nas figuras. Ao regime turbulento associamos as cores verde e vermelha: verde = { valores nas células menores que 0,5 } e vermelho = { valores nas células maiores que 0,5 e menores que 1,0 }.

Quando o valor do parâmetro se aproxima de  $\mu = 0,4$  os processos transientes tornam-se cada vez mais longos, atingindo-se sempre o regime laminar. Para  $\mu = 0,402$  dá-se uma transição de fase, passando a existir um regime «transiente infinito», isto é, se nos fixamos num ponto da rede, essa célula mantém-se num estado laminar durante um tempo finito, depois muda subitamente para um regime turbulento durante um intervalo de tempo pequeno, voltando ao estado laminar por um período de tempo grande, não existindo regularidade aparente nos períodos de tran-



**Fig. 20** – Evolução temporal de uma rede de funções acopladas, para a função da figura 18 b). O parâmetro  $\mu$  mede a intensidade do acoplamento entre células vizinhas. A cor branca corresponde ao regime laminar. As cores vermelha e verde correspondem aos regimes turbulentos. Para o parâmetro de acoplamento  $\mu = 0,402$  existe uma transição do regime laminar para o regime turbulento por intermitência espacio-temporal.

sição laminar  $\rightarrow$  turbulento. Este tipo de comportamento designa-se por intermitência espacio-temporal.

Para valores do parâmetro  $\mu > 0,402$ , surge então um regime turbulento em que as durações das fases laminares e turbulentas em cada célula se mantêm limitadas e da mesma ordem de grandeza. No caso em que  $\mu > 0,402$ , os padrões da rede celular são quasi-periódicos, enquanto que, no regime intermitente,  $\mu = 0,402$ , o padrão da rede celular é complexo (Figura 7).

Quando as configurações iniciais são periódicas, chega-se exactamente às mesmas conclusões. Assim, neste exemplo, obtém-se uma transição de um regime laminar para um regime turbulento através de intermitência.

Em conclusão, estes modelos de redes de autómatos celulares contêm os processos qualitativos que originam o fenómeno da turbulência. No entanto, não existe ainda uma teoria consistente e facilmente calibrável com os sistemas reais. Recentemente descobriram-se redes de funções acopladas para simular o processo de formação de bolhas no interior de fluidos em regiões de transições de fase de condensação e para simular a convecção turbulenta por gradiente de temperatura.

## REDES DE NEURÓNIOS

Em tudo o que foi feito até aqui partiu-se do princípio que as redes celulares de autómatos eram constituídas por um grande número de células e que o nosso interesse residia apenas no estudo de fenómenos cooperativos em larga escala. Podemos agora passar ao limite de redes com poucas células e com interações mais complexas. São as redes de neurónios.

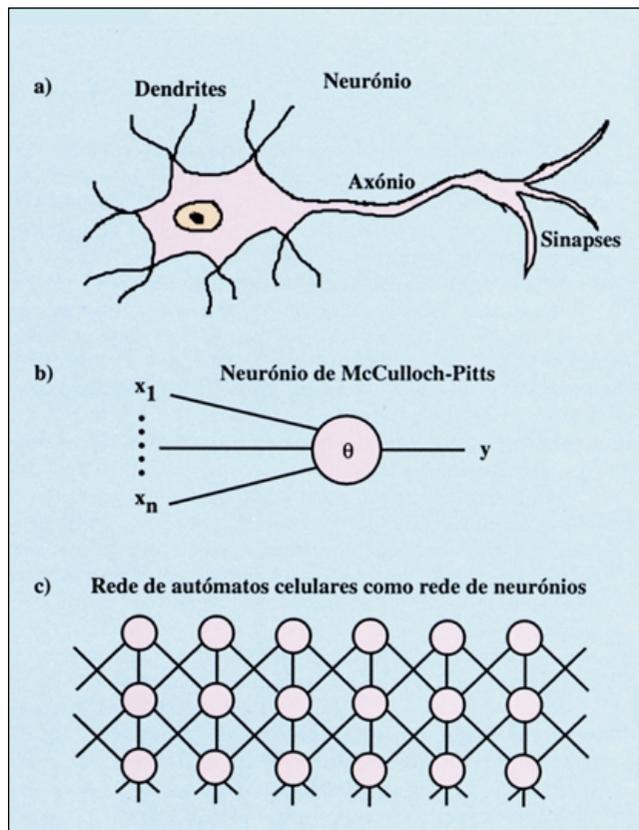
Um neurónio recebe os seus estímulos através das dendrites e comunica com as células vizinhas através das sinapses, ligadas pelo axónio à região do núcleo celular, Figura 21 a). O modelo eléctrico mais simples para simular um neurónio é uma unidade ou caixa preta com  $n$  entradas e uma saída. Se este sistema recebe impulsos de intensidades  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e se, a cada unidade de entrada está associado um peso  $w_1, w_2, \dots, w_n$  tal que  $\sum w_i = 1$ , o neurónio tem a resposta à saída

$$y = \begin{cases} 0 & \text{se } \sum w_i x_i < \theta \\ 1 & \text{se } \sum w_i x_i \geq \theta \end{cases}$$

em que  $\theta$  define o limiar de actividade do neurónio, Figura 21b). Uma estrutura deste tipo designa-se por neurónio de McCulloch-Pitts. Claro está que existem outras variantes para modelos de neurónio em que, por exemplo, a resposta é uma função contínua das entradas.

Uma rede de neurónios é um conjunto de neurónios de McCulloch-Pitts, todos ligados entre si, com várias entradas, várias saídas e várias unidades intermédias ou unidades escondidas. Quando, numa rede de neurónios, se deixam variar os pesos  $w_i$  ao longo do tempo através de um mecanismo de retroacção tem-se um perceptrão de Rosenblatt. Os perceptrões permitem construir circuitos eléctricos para aprendizagem de padrões pois é possível, em alguns casos, construir estratégias adaptáveis de reconhecimento (por exemplo, o teorema da convergência dos perceptrões). No entanto, esta aproximação, que se tem mostrado eficiente para resolver alguns problemas de engenharia, tem recebido críticas da parte de alguns biofísicos pois os estados de equilíbrio das redes de neurónios correspondem a mínimos locais de uma mesma função energia e, nos sistemas biológicos, a selecção natural implica uma escolha entre comportamentos estruturais diversos, mais parecida com as transições de fase.

Por exemplo, os autómatos celulares unidimensionais da Figura 5 e da Figura 20 podem ser interpretados como uma rede bidimensional infinita de neurónios em que cada neurónio tem três saídas, Figura 21 c). Neste caso, como foi mostrado na secção precedente, é possível obter sistemas neuronais com transições de fase, portanto mais próximos dos mecanismos de selecção biológica.



**Fig. 21** - a) Desenho esquemático de um neurónio. b) Neurónio de McCulloch-Pitts. c) Rede espaço-temporal de autómatos celulares como uma rede bidimensional de neurónios com três entradas e três saídas.

## CONCLUSÕES

Os aspectos da física moderna apresentados aqui estão no início. Está-se a fazer perguntas relacionadas com comportamentos globais de sistemas com efeitos cuja descrição em termos de comportamentos individuais falha.

Nos exemplos que analisámos ao longo deste artigo apareceram alguns conceitos aparentemente não correlacionados. São eles: padrões espaciais e espaço-temporais, turbulência e caos, sistemas discretos, máquinas de computação universal, fenómenos colectivos e transições de fase. As ligações entre eles são ainda muito ténues, embora as parecenças formais sejam muito grandes. Provavelmente, se se mostrar que existem sistemas físicos com a capacidade de computação universal a nossa única possibilidade de fazer previsões sobre eles é observá-los. A experimentação aparecerá assim como mais uma ferramenta de cálculo!

---

## AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho só foi possível devido ao apoio concedido pelo Ministério da Defesa Nacional, ao abrigo do Programa

MATER. Quero ainda agradecer ao Vítor Santos que criou o desenho da Figura 1 .

---

## SUGESTÕES DE LEITURA

A noção de autómato celular foi extensamente discutida por von Neumann no artigo *The general and logical theory of automata*. *The World of Mathematics*, vol. IV, Tempus Books, Washington, 1955 e 1988, e apareceu sistematizada no livro de E. F. Codd, *Cellular automata*, Academic Press, New York, 1968.

A máquina de Turing foi inventada simultaneamente por A. Turing e E. Post, A. M. Turing, *On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem*, *Proceedings London Mathematical Society* vol. 2 (1937) págs. 230-265; E. L. Post, *Finite combinatory processes - formulation I*, *J. Symbolic Logic*, vol. 1 (1936) Págs. 103-105.

A sistematização dos modelos matemáticos de autómatos celulares e as suas aplicações a sistemas físicos foi publicada pela primeira vez por S. Wolfram, *Statistical Mechanics of Cellular Automata*, *Reviews of Modern Physics*, vol. 55 (1983) págs. 601-644. As propriedades de semelhança nos autómatos celulares foram descobertas por von Neumann e S. Wolfram. Existe já neste momento uma vasta bibliografia de artigos científicos, livros e actas de congressos.

As propriedades de computação universal do jogo da vida foram descobertas por Conway e apareceram publicadas no livro de E. R. Berlekamp, J. H. Conway e R. K. Guy, *Wimpy Ways for Your Mathematical Plays*, Vol. II, Academic Press, New York, 1982.

O modelo para o escoamento de fluidos deve-se a Frisch, Hasslacher e Pomeau, *Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation*, *Physical Review Letters*, vol. 56 (1988) págs. 1505-1508.

Existe algum trabalho sobre a classificação de padrões complexos em autómatos celulares. Por exemplo: R. Cordovil, R. Dilão e A. Noronha da Costa, *Periodic orbits for additive cellular automata*, *Discrete and Computational Geometry*, vol. 1 (1986) págs. 277-288; R. Dilão, *Periodic points and entropies for cellular automata*, *Complex Systems*, vol. 3 (1990) págs. 117-128.

O programa para o cálculo do escoamento de fluidos no interior de regiões de forma arbitrária está a ser desenvolvido no Departamento de Física do Instituto Superior Técnico e colaboraram até este momento, R. Dilão, A. Noronha da Costa, T. Rêgo, A. Rica da Silva e os alunos P. Dimas e J. Ferreira.

O conceito de rede de funções acopladas foi introduzido por K. Kaneko, *Collapse of tori and genesis of chaos in dissipative systems*, World Scientific, Singapore, 1986. As transições de fase de regimes laminares para turbulentos através de intermitência foram encontradas por H. Chaté e P. Manneville, *Transition to turbulence via spatiotemporal intermittency: modelling and critical properties*, in, *New Trends in Nonlinear Dynamics and Pattern-Forming Phenomena*, P. Collet e P. Huerre, ed., Plenum, New York, 1988.

Para uma introdução às redes de neurónios veja-se o livro de M. A. Arbib, *Brains, Machines, and Mathematics*, segunda edição, Springer-Verlag, New York, 1987, e o artigo de J. J. Hopfield, *Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons*, *Proceedings of The Natural Academy of Sciences USA*, vol. 81 (1984) págs. 3088-3092. Uma das críticas mais severas ao conceito de rede neuronal como explicação do funcionamento do cérebro biológico foi publicada por F. Crick na revista *Nature*, vol 337 (1989) págs. 129-132, *The recent excitement about neural networks*.

---