UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – UFRPE
Matemática Discreta – Bacharelado em Sistemas de Informação
Teste – valor 3 pontos
Nome:____Nota:____

1. Seja R a relação de congruência módulo 5 (x ≡ y mod 5) no conjunto dos inteiros.

a) Prove que R é uma relação de equivalência:

i) R é reflexiva pois $x \equiv x(\bmod 5)$, já que 5|(x-x), ou seja 5|0 pois 0=5.0, $0 \in Z$

ii) R é simétrica, pois

$xRy \Rightarrow x \equiv y(\bmod 5) \Rightarrow 5 \mid (x-y) \Rightarrow x-y=5k1$, $k1 \in Z$

Multiplicando por (-1)

$-(x-y)=-5k1 \Rightarrow y-x=5(-k1) \Rightarrow 5 \mid (y-x) \Rightarrow y \equiv x(\bmod 5) \Rightarrow yRx$

iii) R é transitiva, pois

$xRy \Rightarrow x \equiv y(\bmod 5) \Rightarrow 5 \mid (x-y) \Rightarrow x-y=5k1$, $k1 \in Z$ (1)

$yRz \Rightarrow y \equiv z(\bmod 5) \Rightarrow 5 \mid (y-z) \Rightarrow y-z=5k2$, $k2 \in Z$ (2)

Adicionando (1) e (2), tem-se

$x-y+y-z=5k1+5k2 \Rightarrow x-z=5(k1+k2),\ (k1+k2) \in Z$

$\Rightarrow x \equiv z(\bmod 5) \Rightarrow xRz$.

De i), ii) e iii) tem-se que R é relação de equivalência.

---

b) Determine as Classes de Equivalência: [0], [1], ...,[6]

$[0]=\{x \in Z \mid xR0\}=\{x \in Z \mid x \equiv 0(\bmod 5)\}=\{x \in Z \mid x=5k, k \in Z\}$

$[1]=\{x \in Z \mid xR1\}=\{x \in Z \mid x \equiv 1(\bmod 5)\}=\{x \in Z \mid x=5k+1, k \in Z\}$

$[2]=\{x \in Z \mid xR2\}=\{x \in Z \mid x \equiv 2(\bmod 5)\}=\{x \in Z \mid x=5k+2, k \in Z\}$

$[3]=\{x \in Z \mid xR0\}=\{x \in Z \mid x \equiv 3(\bmod 5)\}=\{x \in Z \mid x=5k+3, k \in Z\}$

$[4]=\{x \in Z \mid xR0\}=\{x \in Z \mid x \equiv 4(\bmod 5)\}=\{x \in Z \mid x=5k+4, k \in Z\}$

$[5]=\{x \in Z \mid xR0\}=\{x \in Z \mid x \equiv 5(\bmod 5)\}=\{x \in Z \mid x=5k+5=5(k+1),(k+1) \in Z\}$

$[6]=\{x \in Z \mid xR0\}=\{x \in Z \mid x \equiv 6(\bmod 5)\}=\{x \in Z \mid x=5k+6=5(k+1)+1,(k+1) \in Z\}$

Defina uma Partição:
Note que a partir de [5] começa a se repetir
[5]=[0] múltiplos de 5
[6]=[1] múltiplos de 5 adicionados a 1 ...

Uma partição para $Z=[0] \cup [1] \cup [2] \bigcup [3] \cup [4]$

2. Considere a relação “tem o mesmo tamanho que” definida sobre todos os conjuntos finitos de Z (isto é ARB see |A|=|B|. Verifique todas as propriedades desta relação. Determine a classe de equivalência [{1,2,4}].

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer.

Reflexiva: Sim, pois ARA pois |A|=|A|
Anti-Reflexiva: não, pois é reflexiva
Simétrica: Sim, pois se ARB então |A|=|B|. Assim |B|=|A|. Logo BRA
Anti-Simétrica: Não, pois tome A={1,2} e B={3,4} ARB e BRA mas $A \neq B$
Transitiva: Sim, se ARB e BRA, tem-se que |A|=|B| e |B|=|C|. Pela transitividade da igualdade tem-se que |A|=|C|.

3. Sejam $f : Q \to Q$, $f(x) = 8x^3 - 42x$ e $g : N \to R$, $g(x) = \dfrac{31}{x^3 - 8}$, e $h : R \to R$, h(x)=cos(x)

a) Verifique se f, g e h são funções no domínio e contradomínio indicados. Caso afirmativo, prove que ou refute que são injetoras e sobrejetoras.

b) Determine as condições necessárias para que existam as funções compostas “gof” e “ho(fog)” e calcule-as. **Responda atrás.**

Solução:

a)

1) Função $f : Q \to Q$ $f(x) = 8x^3 - 42x$

- f é função, pois cada elemento do domínio está associado a um único elemento no contradomínio**.**
- **f** é injetora. Sejam $x1, x2 \in Z$

  $f(x1) = f(x2) \Rightarrow 8x1^3 - 42 = 8x2^3 - 42 \Rightarrow x1^3 = x2^3 \Rightarrow x1 = x2$
- **f** não é sobrejetora, pois contradomínio $\neq$ imagem

  tome

  $r = -50$**,** $r \in Q$**.**

  Devemos determinar x tal que f(x)=r

  $r = 8x^3 - 42 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{r+42}{8}}$ **. Assim** $x = \sqrt[3]{\dfrac{-50+42}{8}}$ **. Porém** $x \notin Q$

2) Função $g : N \to R$ $g(x) = \dfrac{31}{x^3 - 8}$

Não é função, pois se x=2, f(x) não está definida

3) Função $h : R \to R$, h(x)=cos(x)

- f é função, pois cada elemento do domínio está associado a um único elemento no contradomínio**.**
- **f** não é injetora. Sejam $x1 = 0, x2 = \prod$

  $f(x1) = f(x2) \Rightarrow \cos(0) = \cos(2\prod)$**, porém** $x1 \neq x2$

- **f** não é sobrejetora,
pois contradomínio $\neq$ imagem, já que imagem=[-1,1] e contradomínio=R

b)

- $(g \circ f) = g(f(x)) = g(8x^3 - 42) = \dfrac{31}{\left(8x^3 - 42\right)^3 - 8}$

Condições: $imagem(F) \subseteq domínio(G)$

- $h \circ (f \circ g) = h(f(g(x)) = h\left(f\left(\dfrac{31}{x^3 - 8}\right)\right) = h\left(8\left(\dfrac{31}{x^3 - 8}\right)^3 - 42\right) = \cos\left(8\left(\dfrac{31}{x^3 - 8}\right)^3 - 42\right)$

Condições: $imagem(f(g(x))) \subseteq domínio(h)$