Resolução

1) Quais desses subconjuntos são iguais?
A={x|(∃y, y ϵ {0,1,2}) e x = y^2} , B={x|(∃y, y ϵ {0,-1,-2}) e x = y^2} e C={x|(∃y, y ϵ {-1,0,2,0}) e x = y^2}
Todos são iguais.

2) Escreva os elementos dos seguintes conjuntos:
   a) A = {x | x ϵ N, x ≤10 e 3|x}
   A = {x | x ϵ N, x ≤10 e x = 3.k, k ϵ Z}
   A = {0,3,6,9}
   b) B = {x | x ϵ Z, x^2 = 4}
   B = {2,-2}
   c) C = {x | x ϵ Z, x é primo e 2 | x}
   C = {2}
   d) D = {x | x ϵ N, x≤10 e (∀y)(y é par → x ≠ y)}
   D = {1,3,5,7,9}

3) Sejam A = {a, {a}, {{a}}}; B = {a}; C = {∅,{a,{a}}} e ∅ .Quais das afirmações são verdadeiras?
a) B ⊆ A**(v), pois a∈ A**
b) ∅⊆ C**(v), pois o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto**
c) {a,{a}} ⊆ A**(v), pois tanto o elemento a como o {a} pertencem aA**
d)C ∈ A**(f), poispor exemplo, ∅∈ C e ∅∉ A**
e) {a,{a}}∈ A **(f), pois o elemento {a,{a}} não pertence a A.**
Correto:{a,{a}} ⊆ A
f) ∅∈ A**(f), vazio é um subconjunto deA e não um elemento de A**
g) ∅∈ C**(v), pois vazio é um elemento de C**
h) a ∈ C**(f)** , **a não é um elemento de C**
i) {{a}} ∈ A**(v)pois o conjunto {{a}} é um elemento de A**
j) {{a}} ⊆ A**(v), afinal {a} é um elemento de A**

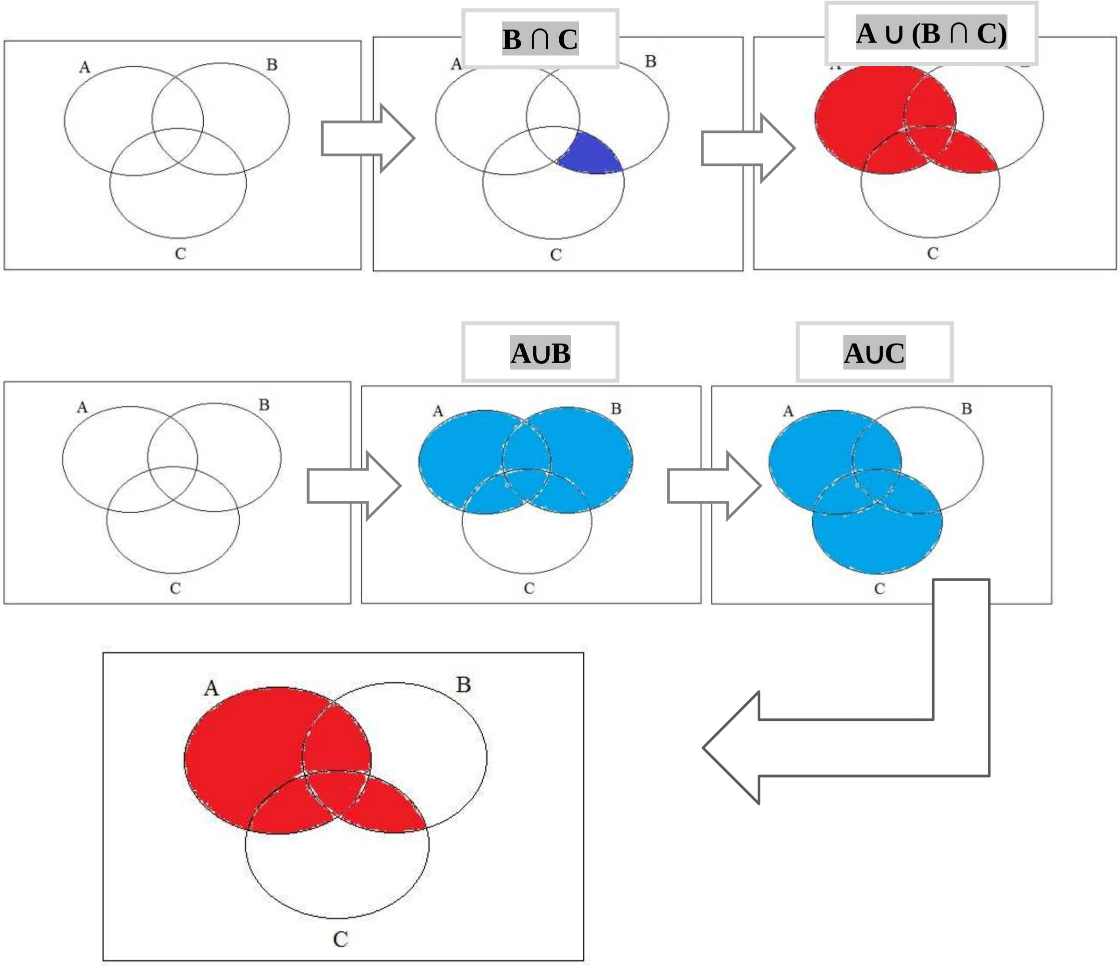
4) Dado o conjunto A = {{2,4,6},{{7}},8,9,{1}}:
   a) Quais são os elementos de A?**{2,4,6} ; {{7}} ; 8 ; 9 e {1}**
   b) 1∈ A?**Não, 1∈ {1} que é subconjunto de A**
   c) 8∈ A? **Sim.**
   d) {{7}} ∈A?**Sim**
   e) ∅∈A?**Não, ∅ é subconjunto de A**
   f) {{1}} ∈ A? **Não**
   g) {{1}} ⊆A?**Sim, pois {1} é um elemento de A**
   h) ∅⊆A?**Sim.**
   i) {8,9} ⊆A?**Sim, pois 8 e 9 são elementos de A**

5) Dado o conjunto universo U = {1,2,...,9} e os conjuntos A = {2,4,5,6,8,} B = {1,4,5,9} C = {x:x∈ Z e x^2 = -1} D = {x|x∈ Z e 2 ≤ x < 5}.Determine:
C = ∅ ;
D = {2,3,4}

a) $A \cup B$ e $A \cap B$ **$A \cup B = \{1,2,4,5,6,8,9\}$; $A \cap B = \{4,5\}$**
b) $C \cup D$ e $C \cap D$ **$C \cup D = D$; $C \cap D = \emptyset$**
c) $D \cup A$ e $D \cap A$ **$D \cup A = \{2,3,4,5,6,8\}$; $D \cap A = \{2,4\}$**
d) A^c (é o mesmo que A') **$A^c = \{1,3,7,9\}$**
e) $A-D$ **$A-D = \{3,5,6,8\}$**
f) $A \Delta B =$ $\{1,2,6,8,9\}$
g) $A \cap A^C$ $\{\}$
h) $(A \cap B)^C$ **$\{1,2,3,6,7,8,9\}$**
i) $(D \cap B) \cup A^C$ **$\{1,3,4,7,9\}$**
j) $(B \cap C) \cup (D \cap B) = \{4\}$

6) Dado os conjuntos $A = \{2,4,5\}$ e $C_B A = \{7,8\}$, quais são os elementos do conjunto B.
Se $C_B A$ é o que falta em A para se tornar B, logo $B = \{2,4,5,7,8\}$

7) Ilustre a lei de distributividade $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ com o diagrama de Venn.



8) Sejam $A = \{x \in Z: x$ é múltiplo de $8\}$ e $B = \{x \in Z: x$ é múltiplo de $2\}$. Prove que $A \subseteq B$.
$\forall x \in A$, $x = 8k_1$ onde $k_1 \in Z$. Logo $x = 2(4k_1)$, como k_1 é inteiro, $2k_1$ também o é, assim temos que $x = 2k$, $k \in Z$, logo $\forall x \in A$, x é múltiplo de 2, portanto $x \in B$. Assim $A \subseteq B$.

9) Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Utilizando as definições, prove que:

a) **$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$**

i) $A - (B \cap C) \subseteq (A - B) \cup (A - C)$

$\forall x, x \in A - (B \cap C) \Rightarrow$(definição operação diferença)

$\Rightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cap C)$(De Morgan)

$\Rightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \Rightarrow$ (distributiva)

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \Rightarrow$(def. op. Diferença)

$\Rightarrow (x \in A - B) \vee (x \in A - C) \Rightarrow$(def. união)

$\Rightarrow x \in (A - B) \cup (A - C)$

ii) $(A - B) \cup (A - C) \subseteq A - (B \cap C)$

$\forall x, x \in (A - B) \cup (A - C) \Rightarrow$(def. união)

$\Rightarrow (x \in A - B) \vee (x \in A - C) \Rightarrow$(def. operação diferença)

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \Rightarrow$(distributiva)

$\Rightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \Rightarrow$(def. união e interseçãoe De Morgan)

$\Rightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cap C) \Rightarrow$def. operação diferença

$\Rightarrow x \in A - (B \cap C)$

De i) e ii) conclui-se que: $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

b) $(A \cup B) - (A \cap B) \subseteq A \Delta B$

$\forall x, x \in (A \cup B) - (A \cap B) \Rightarrow$(def. diferença)

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B) \Rightarrow$(união)

$\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin (A \cap B) \Rightarrow$(distributiva)

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin (A \cap B)) \vee (x \in B \wedge x \notin (A \cap B)) \Rightarrow$(interseção e De Morgan) (1)

$\Rightarrow (x \in A \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \vee (x \in B \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \Rightarrow$(distributiva) (2)

$\Rightarrow \big((x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B)\big) \vee \big((x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in B \wedge x \notin B)\big) \Rightarrow$
(Elemento absorvente e def. de diferença) (3)

$\Rightarrow \big(\emptyset \vee (A - B)\big) \vee \big((B - A) \vee \emptyset\big) \Rightarrow$ (Elemento neutro e def. união)

$\Rightarrow (A - B) \cup (B - A) \Rightarrow$(diferença simétrica)

$\Rightarrow A \Delta B$

Portanto, **$(A \cup B) - (A \cap B) \subseteq A \Delta B$**

Observação: os passos (1) e (2) e (3) poderiam ser omitidos, considerando que $(x \in A \wedge x \notin (A \cap B)) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B$
$(x \in B \wedge x \notin (A \cap B)) \Rightarrow x \in B \wedge x \notin A$

c) Prove $A \subseteq B$ **se e somente se** $B' \subseteq A'$

i) $\Rightarrow A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

Hipótese: $A \subseteq B$ Tese: $B' \subseteq A'$

$\forall x, x \in B' \Rightarrow x \notin B$, como $A \subseteq B$ (hipótese), $x \notin A \Rightarrow x \in A'$.

Portanto $B' \subseteq A'$.

ii) $\Leftarrow B' \subseteq A' \Rightarrow A \subseteq B$

Hipótese: $B' \subseteq A'$ Tese: $A \subseteq B$

$\forall x, x \in A \Rightarrow x \notin A'$, como $B' \subseteq A'$ (hipótese), $x \notin B' \Rightarrow x \in B$.

Portanto $A \subseteq B$.

De i) e ii), conclui-se que $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$

d) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

$\forall$ ***X, X***$\in$ P(A) ∪ P(B)união
⇒ X ∈ P(A) ∨ X ∈ P(B) ⇒def. conjunto das partes
⇒ X⊆ A ∨ *X*⊆B ⇒definição união
⇒ X⊆A ∪ B ⇒def. conj. das partes
⇒ X ∈ P(A ∪ B)

Observação: utilizar letra maiúscula para representar os elementos do conjunto das partes, pois eles são subconjuntos

e) Prove A ⊆ B se e somente se A∩ B’ =∅
⇒A ⊆ B⇒ A∩ B’ = ∅
Hipótese: A ⊆ B   Tese: A∩ B’ = ∅
Considere A ⊆ B e suponha por contradição que A ∩ B’ ≠∅. Logo existe x, tal que x ∈ A e x∈ B´. Como A ⊆ B, se x ∈ A então x∈ B. ABSURDO! (x ∈ B ∧ x∈B´).

⇐A∩ B’ = ∅⇒ A ⊆ B
Considere A∩ B’ = ∅ e suponha por contradição que A ⊄ B. Logo ∃x ∈ A e x ∉ B, assim x ∈ A e x ∈ B´⇒ A∩ B’≠∅. ABSURDO! (contradiz a hipótese).
De i) e ii), conclui-se que A ⊆ B se e somente se A∩ B’ =∅

10) Prove, utilizando os teoremas da teoria de conjuntos

a. (A' ∪ B')' = A ∩ B
(A' ∪ B')' =(Lei de Morgan)
(A')' ∩ (B') '(propriedades de complemento)
A ∩ B.

b. ([(A∩C) ∩ B]∪ [(A ∩ C) ∩ B’])∪ (A ∩ C)’ = U
([(A∩C) ∩ B]∪ [(A ∩ C) ∩ B’])∪ (A ∩ C)’=(Propr. Distributiva)
= ([(A∩C) ∩ (B∪ B’)] ∪ (A ∩ C)’ = propriedades de complemento
= ([(A∩C) ∩ U)] ∪ (A ∩ C)’ = Elemento neutro da interseção
= (A∩C) ∪ (A ∩ C)’= propriedades de complemento
= (A∩C)

c. $\overline{\left[\left(\overline{A\cap\left(\bar{A}\cup\bar{\bar{B}}\right)}\right)\cap\left(\overline{\left(\bar{B}\cup A\right)\cap B}\right)\right]}=A\cap B$

$\overline{\overline{[(A\cap(\bar{A}\cup\bar{\bar{B}}))}\cap\overline{((\bar{\bar{B}}\cup A)\cap B)]}}=Morgan$

$=[\overline{\overline{A\cap(\bar{A}\cup\bar{\bar{B}})}}]\cup[\overline{\overline{(\bar{\bar{B}}\cup A)\cap B}}]=propr.Complemento$

$=[A\cap(\bar{A}\cup B)]\cup[\bar{B}\cup A)\cap B]=distributiva$

$=[(A\cap\bar{A})\cup(A\cap B)]\cup[(B\cap\bar{B})\cup(A\cap B)]=propr.Complemento$

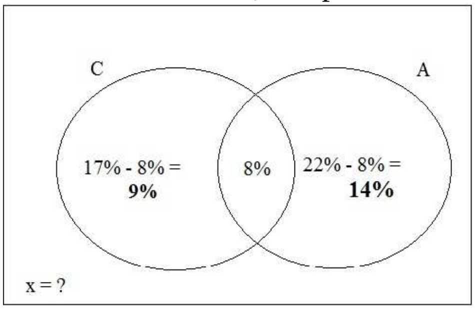
$=[\phi\cup(A\cap B)]\cup[\phi\cup(A\cap B)]=El.neutro$

$=A\cap B$

d) [C∩(A ∪ B)] ∪ [(A∪B) ∩ C’] = A ∪ B

=[C∩(A ∪ B)] ∪ [(A∪B) ∩ C'] =*distributiva*
=[(C ∩ A) ∪ (C ∩ B)] ∪ [(C'∩ A) ∪ (C'∩ B)]=*associativa da união*
=(C ∩ A) ∪ (C' ∩ A) ∪ (C ∩ B) ∪ (C' ∩ B) =*distributiva*
=[A ∩(C ∪C')]∪ [B∩ (C ∪ C')]=*propr. decomplemento*
=(A ∩ U) ∪ (B ∩ U) = *El. Neutro da interseção*
=A ∪ B

11) Um levantamento sócio econômico entre os habitantes de uma cidade revelou que,exatamente: 17% têm casa própria; 22% têm automóvel; 8% têm casa própria e automóvel. Qual opercentual dos que não têm casa própria nem automóvel?

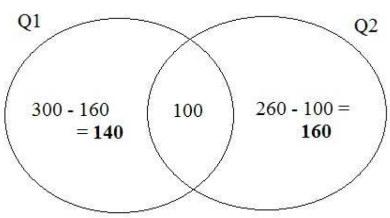


|A|=22%; C=17%; |A∩C|=8%

Calcular |A∪C|=|A|+|C|-|A∩C|=
=22%+17%-8%=31%
Total=100%
100%-|A∪C|=69%

Outra forma:
x+9%+8%+14% = 100%
x = 69%

12) Em uma prova de matemática com apenas duas questões, 300 alunos acertaram somente uma dasquestões e 260 acertaram a segunda. Sendo que 100 alunos acertaram as duas, e 210 alunoserraram a primeira questão. Quantos alunos fizeram a prova?



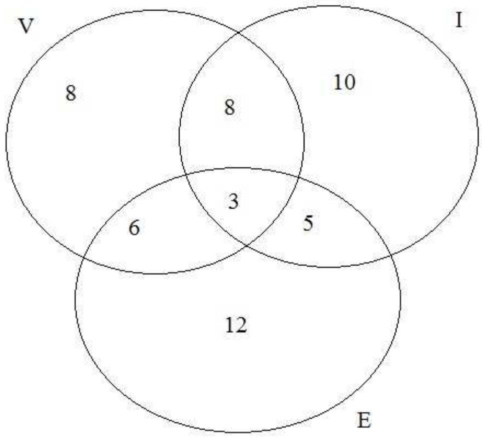
| Q2|=260; |Q1∩Q2|=100
|(Q1-Q2) ∪ (Q2-Q1)=300
|U-Q1|=210
|Q2-Q1|=|Q2|-|Q1∩Q2|=260-100=160

Calcular |Q1∪Q2|=|(Q1-Q2) ∪ (Q2-Q1)+|Q1∩Q2|=300+100=400

Sabendo que 210 alunos erraram a primeira questão e dentro deles estão incluídos tanto os que erraram as duas questões, como aqueles que acertaram apenas a segunda. Se fizermos 210 – 160 = 50, o resultado será o número de alunos que erraram a primeira e erraram a segunda.

Total de alunos que fizeram a prova foi: |Q1∪Q2|+50 = 400+50=450.

13) Em uma pesquisa com 60 pessoas, verificou-se que:
- 25 Compram o produto V;|V|=25
- 26 Compram I ; |I|=26
- 26 Compram E ; |E|=26
- 9Compram os produtos V e E ; | V∩E|=9
- 11 Compram V e I;|V∩I|=11
- 8Compram E e I; |E∩I|=8
- 3compram os três produtos ; |E∩I∩V|=3



a) Ache o número de pessoas que compram pelo menos um dos 03 produtos

$|V \cup I \cup E = |V|+|I|+|E|-|V \cap I|-|V \cap E|-|E \cap I|+|E \cap I \cap V| = 52$

b) Ache o número de pessoas que compram exatamente um produto

$8 + 10 + 12 = 30$

c) Ache o número de pessoas que não compram nenhum dos produtos

$60 - 52 = 8$

14) Determine a quantidade de elementos em P(S) e o conjunto das partes de S = {p,q,r,s}.

$2^n = 2^4 = 16$ elementos

{{},{p},{q},{r},{s},{p,q},{p,r},{p,s},{q,r},{q,s},{r,s},{p,q,r},{p,q,s},{q,r,s},{r,s,p},{p,q,r,s}}

15) O que pode-se dizer sobre A se P(A) = {{},{x},{y}.{x,y}}

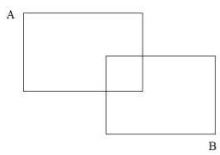
A = {x,y}

16) Qual a cardinalidade dos conjuntos abaixo?

a) $A = \emptyset$ — **$|A| = 0$**
b) $A = \{\emptyset\}$ — **$|A| = 1$**
c) $B = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ — **$|A| = 2$**
d) $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{ \emptyset, \{\emptyset\}\} \}$ — **$|A| = 3$**

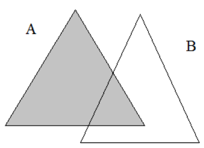
17) Assinale, nos diagramas abaixo, os conjuntos indicados.

a) $(A – B) \cap C_B A$

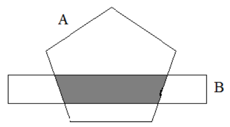


$(A – B) \cap C_B A = \emptyset$

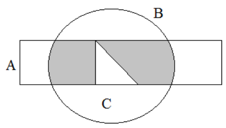
b) $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup (B \cap B') = A \cup \emptyset = A$



c) $A \cap (B \cup A') = (A \cap B) \cup (A \cap A') = (A \cap B) \cup \emptyset = (A \cap B)$

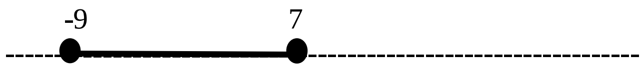


d) $C_{A \cap B}$ C= (A ∩ B) ∩ C'



18) Considere os seguintes conjuntos:

A = {x ∈ℜ | -8 ≤ x ≤ 8}


B ={x∈ℜ| -9 ≤ x ≤ 7}


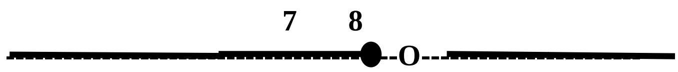
C = {x∈ℜ| -2 ≤ x ≤ 10}


D = {x∈ℜ| 9≤ x ≤ 15}


Represente, graficamente, os seguintes conjuntos e produtos cartesianos:

a) G = A ∩ (B ∪A')

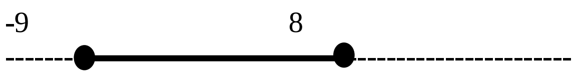
A' :


(B ∪ A') :


A ∩ (B ∪ A') = A∩B


G = {x ∈ℜ | -8 ≤ x ≤ 7}

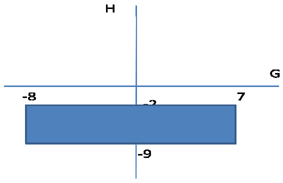
b) H = (A∪B) ∩ $\overline{C}$

(A∪B) = {x ∈ℜ | -9 ≤ x ≤ 8}


$\overline{C}$ = {x ∈ℜ | -2 < x ∧ x > 10}


H = (A∪B) ∩ $\overline{C}$ = {x ∈ℜ|-9≤ x < 2}

c) G x H



d)C x D