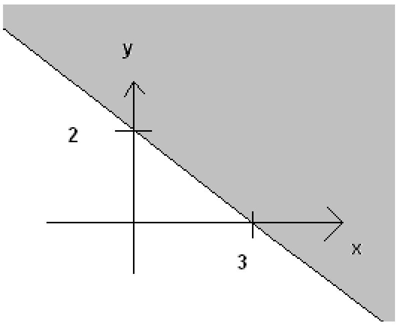
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – UFRPE
Matemática Discreta – Licenciatura em Computação
Respostas - 3ª Lista de Exercícios

Relações e Funções

1.Represente, graficamente, a relação $S = \{(x,y) \in \Re x \Re \,/\, 2x + 3y - 6 \geq 0\}$.



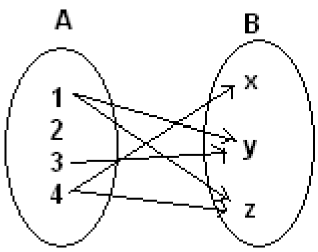
x	y
0	2
3	0

2.São dados A={1,2,3,4} e B={x, y, z}. Seja R a seguinte relação de A para B:
R = { (1,y), (1,z) (3,y) (4,x) (4,z)}

a) Determine a matriz da relação

$$MR = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

b) Desenhe o diagrama de setas de R



c) Ache a relação inversa R^{-1} de R

R^{-1} = {(y,1),(z,1),(y,3),(x,4),(z,4)}

d) Determine o domínio e a Imagem de R

D(R) = {1,3,4} Im(R) = {x,y,z}

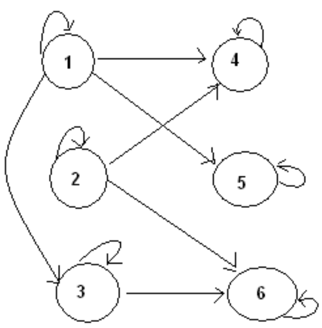
3.Seja A={1,2,3,4,6} e seja a relação em A definida por "x divide y", escrita x | y . (Note que x| y se e somente se existe algum inteiro k tal que y = xk)

a) Escreva R como um conjunto de pares ordenados

R = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4)}

b) Desenhe seu grafo orientado

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – UFRPE
Matemática Discreta – Licenciatura em Computação
Respostas - 3ª Lista de Exercícios



c) Ache a relação inversa R^{-1} de R.

R^{-1} = {(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(6,1),(2,2),(4,2),(6,2),(3,3),(6,3),(4,4)}

R^{-1} pode ser descrita em palavras? Como?

R^{-1} : " y divide x"

4. Sejam A={1,2,3}, B={a,b,c} e C={x,y,z} R={(1,a), (1,c), (2,a), (3,b)} e S={(a,x),(a,y),(a,z),(c,x)}:

a) Ache, se for po
ssível, a relação composta RoS.
Não é possível.

b) Ache, se for possível, a relação composta SoR.

SoR = {(1,x),(1,y),(1,z),(2,x),(2,y),(2,z)}

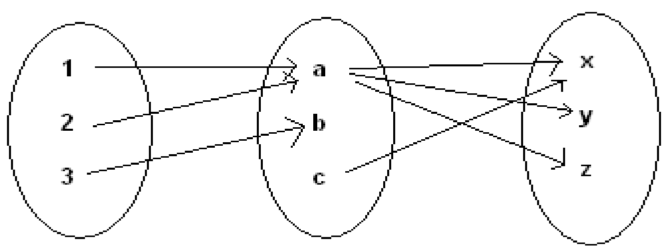
c) Ache as matrizes M_R, M_s, M_{SoR}. Compare com o produto de M_R por M_S.

$$MR = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$MS = \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$M_{SoR} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

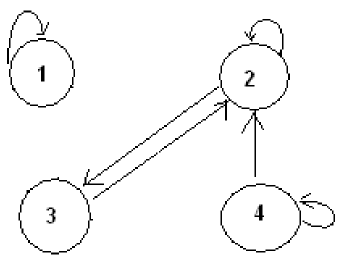
d) Desenhe o diagrama de setas das relações R e S e observe os caminhos de 1 para x, 2 para y e 2 para z.



5.Considere as seguintes relações em um conjunto A={1, 2, 3}
Determine se as relações são reflexivas, simétricas, transitivas e anti-simétircas.
R={(1,1) (1,2) (1,3) (3,3)}
Reflexiva: Não, pois 2 $\in$ A porém (2,2) $\notin$ R
Anti-Reflexiva: Não, pois 1R1 e 3R3
Simétrica: Não, pois (1,2) $\in$ R porém (2,1)$\notin$ R
Anti- Simétrica: Sim, pois $\forall$ x,y $\in$ A, temos que se (xRy $\wedge$ yRx) então x = y, (1,1) e (3,3).
Transitiva: Sim, pois se (x,y)$\in$ R e (y,z)$\in$ R então (x,z) $\in$ R
S={(1,1) (1,2) (2,1) (2,2) (3,3)}
Reflexiva: Sim, pois (1,1),(2,2) e (3,3) $\in$ S.
Anti-Reflexiva: Não, pois é reflexiva.
Simétrica: Sim, pois se xRy então yRx.
Anti- Simétrica: Não, pois 1R2 e 2R1 porém 1≠2.
Transitiva: Sim, pois se (x,y)$\in$ S e (y,z)$\in$ S então (x,z) $\in$ S.
T={(1,1) (1,2) (2,2) (2,3)}
Reflexiva: Não, pois 3 $\in$ A porém (3,3) $\notin$ T
Anti-Reflexiva: Não, pois (1,1) $\in$ T.
Simétrica: Não, pois (1,2) $\in$ T e (2,1) $\notin$ T.
Anti- Simétrica: Sim, pois $\forall$ x,y $\in$ A, temos que se (xRy $\wedge$ yRx) então x = y, (1,1) e (2,2).
Transitiva: Não, pois (1,2) $\in$ T e (2,3) $\in$ T porém (1,3) $\notin$ T.
V = $\varnothing$
Reflexiva: Não, pois $\forall$ x $\in$ A, (x,x) $\notin$ V. Logo V é ireflexiva.
Simétrica: Sim, por vacuidade.
Anti- Simétrica: Sim, por vacuidade.
Transitiva: Sim, por vacuidade.
U = A $\times$ A
Reflexiva: Sim, pois $\forall$ x$\in$ A, (x,x) $\in$ U.
Anti-Reflexiva: Não, pois é reflexiva .
Simétrica: Sim, pois $\forall$ x,y $\in$ A, se xRy então yRx.
Anti- Simétrica: Não, pois (1R2 $\wedge$ 2R1) mas 1 não é igual a 2.
Transitiva: Sim, pois se (x,y)$\in$ U e (y,z)$\in$ U então (x,z) $\in$ U.

6.Seja R ={(1,1) (2,2) (2,3) (3,2) (4,2) (4,4)} as seguintes relações em A={1,2,3,4}

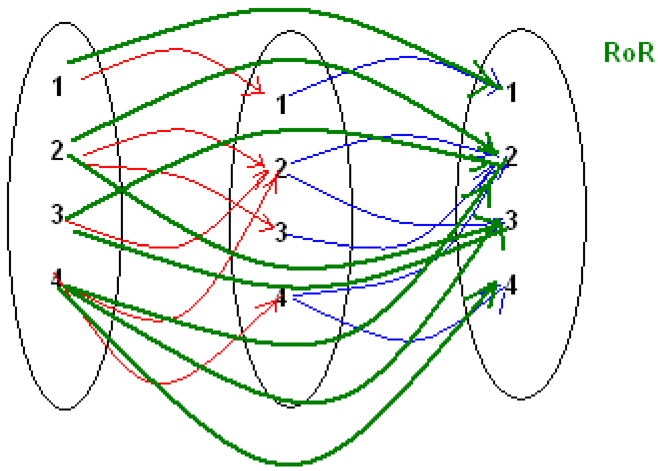
a) Desenhe seu grafo orientado



b) Verifique quais as propriedades de R

Não reflexiva, não anti-reflexiva, não simétrica, não anti-simétrica e não transitiva.

c) Ache R2= RoR



RoR = {(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,2),(4,3),(4,4)}

7. Dê exemplos de relações R em A={1,2,3} que têm a propriedade requerida.

a) R é simétrica e anti-simétrica

R = {(1,1),(2,2)}

b) R é simétrica e não é anti-simétrica

R = {(1,1),(1,2),(2,1)}

c) R não é simétrica e é anti-simétrica

R = {(1,1),(1,2)}

d) R não é simétrica e não é anti-simétrica

R = {(1,2),(2,1),(1,3)}

8. Seja R a seguinte relação de equivalência no conjunto A={1,2,3,4,5,6}
R={(1,1) (1,5) (2,2) (2,3) (2,6) (3,2) (3,3) (3,6) (4,4) (5,1) (5,5) (6,2) (6,3) (6,6)}
Ache a partição induzida por R, isto é ache as classes de equivalência de R.

[1] = {1,5}
[2] = {2,3,6}
~~***[3] = {2,3,6}***~~
[4] = {4}
~~***[5] = {1,5}***~~
~~***[6] = {2,3,6}***~~
PARTIÇÃO: [1] $\cup$ [2] $\cup$ [4]

OBS.: Partição é uma união de classes de equivalência que satisfaz a seguinte propriedade:
- a união é igual ao conjunto A e a interseção de ser vazia.
OBS: quando houver classes iguais escolhe-se apenas uma para colocar na partição

9. Considere que dois inteiros estão próximos um do outro se a diferença entre eles for no máximo 2, por exemplo 3 está próximo de 5, e 10 está próximo de 9, mas 8 não está próximo de 4. No conjunto dos inteiros, verifique as propriedades da relação está próximo de.

R = {(x,y) $\in$ Z | $|x-y| \leq 2$} (a distância entre x e y é no máximo 2)
a) Reflexiva: Sim, pois $\forall$ x $\in$ Z, $|x-x| = 0 \leq 2$. Logo (x,x) $\in$ R.
b) Simétrica: Sim, pois se xRy, $|x-y| \leq 2$. Como $|x-y| = |y-x|$, temos que $|y-x| \leq 2$. Logo yRx.
c) Anti-simétrica: Não, pois tome x=4 e y=6. xRy e yRx mas $x \neq y$.
d) Transitiva: Não, pois tome x=4, y=6 e z=8. xRy e yRz porém (x,z) $\notin$ R, já que $|4-8|=4 \geq 2$.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – UFRPE
Matemática Discreta – Licenciatura em Computação
Respostas - 3ª Lista de Exercícios

---

10. Consideremos o conjunto E de todas as retas de um plano e seja R a relação definida por X R Y se e somente se, X for perpendicular a Y. Esta relação é uma relação de equivalência?

R = {(x,y) ∈ retas de um plano, tal que x é perpendicular a y}
a) Reflexiva: Não, nenhuma reta do plano será perpendicular a si mesma, (x,x) ∉ R.
b)Anti-Reflexiva ou I-Reflexiva: Sim, pois ∀ x ∈ {retas do plano}, (x,x) ∉ R, ou seja x não é perpendicular a x.
c)Simétrica: Sim, pois ∀ x,y ∈ {retas do plano}, se x é perpendicular a y então y é perpend a x.
d) Anti-simétrica: Não, pois x(perpend) y e y(perpend) x, porém x≠y (fig.1).
e) Transitiva: Não, pois sejam x,y,z retas do plano conforme figura 2 temos assim que x(perpend)y e y(perpend)z porem x(não-perpend)z.

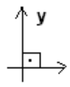


fig.1

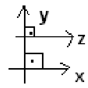


fig. 2

11. Seja E um dado conjunto não vazio de pessoas e consideremos a relação definida por: xRy se e somente se, x e y são irmãos. Esta relação é uma relação de equivalência? (Considere filhos do mesmo pai e da mesma mãe)

Não. (Ver exercício 13 item d).

12. Siga as instruções e depois responda

a) Dê um exemplo de uma relação em um conjunto que não seja nem reflexiva nem anti-reflexiva.

A = {1,2,3} *R = {(1,1),(2,2)}*
Não é reflexiva pois (3,3) não pertence a R.
Não é anti-reflexiva pois (1,1) e R e (2,2) E R. (Bastaria um deles)

b) Dê um exemplo de uma relação em um conjunto, que seja reflexiva e anti-reflexiva. A propriedade anti-reflexiva é a mesma coisa que não reflexiva?

Não existe relação que seja reflexiva e anti-reflexiva, pois:
para ser reflexiva, todo elemento x E A, (x,x) E R e
para ser anti-reflexiva todo elemento x E A, (x,x) não pertence a R.

13. Quais dos seguintes conjuntos são relação de equivalência?

a) R={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2),(3,3)} no conjunto A={1, 2, 3}

R é reflexiva, simétrica e transitiva, portanto é uma relação de equivalência.

b) R={(1,2), (2,3), (3,1)} no conjunto A={1, 2, 3}| em Z

R não é reflexiva, nem simétrica e nem transitiva, portanto não é relação de equivalência.

c) “menor ou igual” em Z

É reflexiva, pois ∀ ∈ Z, x ≤ x;
Não é simétrica, pois tome x = 4 e y = 7, x ≤ y porém y ≥ x;
É transitiva, pois se x ≤ y e y ≤ z então x ≤ z.
Portanto, não é relação de equivalência (já que não é simétrica)..

d) R = Parentes de uma determinada família; xRy ↔ x é irmão de y

Não é reflexiva, pois (x,x) ∉ R (uma pessoa não é irmã dela mesma);
É simétrica, pois se x é irmão de y, então y é irmão de x;
É transitiva, pois se x é irmão de y e y é irmão de z, então x é irmão de z.
Portanto, não é relação de equivalência (já que não é reflexiva).

e) R = Parentes de uma determinada família; xRy ↔ x é pai de y.

Não é reflexiva, pois (x,x) ∉ R (uma pessoa não é pai dela mesma);
Não é simétrica, pois se x é pai de y então y não é pai de x;
Não é transitiva, pois se x é pai de y e y é pai de z, então x não é pai de z e sim avô.
Portanto, não é relação de equivalência (já que não é nem reflexiva, nem simétrica, nem transitiva).

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – UFRPE
Matemática Discreta – Licenciatura em Computação
Respostas - 3ª Lista de Exercícios

14. Prove que se R é uma relação de equivalência em um conjunto S então R^{-1} também é.

Considere por hipótese que R é uma relação de equivalência. Logo R é reflexiva, simétrica e transitiva. Provemos que R^{-1} também é relação de equivalência, para isto é necessário mostrar que R^{-1} é reflexiva, simétrica e transitiva.

i) ***Reflexiva: Como R é reflexiva, tem-se que $\forall x \in S$, xRx. Pela definição de relação inversa x R^{-1} x . Portanto é R^{-1} Reflexiva.***

ii) ***Simétrica: Comnsidere que x R^{-1} y. Pela definição de relação inversa yRx. Como R é simétrica xRy. Pela definição de inversa y R^{-1} x. Portanto R^{-1} é Simétrica.***

iii) ***Transitiva: Considere x R^{-1} y e y R^{-1} z. Pela definição de relação inversa yRx e zRy. Como R é transitiva e zRy e yRx tem-se que zRx. Pela definição de relação inversa x R^{-1} z. Portanto R^{-1} é Transitiva.***

De i, ii e iii conclui-se que R^{-1} é relação de equivalência.

15. Prove que a relação "é congruente com módulo n " é uma relação de equivalência no conjunto dos números inteiros.

$R = \{(x,y) \in Z \mid x \equiv y (mod\ n)\}$

i) Reflexiva: Sim, pois $\forall x \in Z$, $x \equiv x (mod\ n)$, já que n|(x-x), ou seja, n|0, pois 0 = n.0, $0 \in Z$.

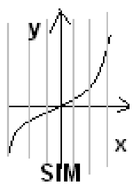
ii) Simétrica: Sim, pois se $x \equiv y$ (mod n) tem-se que n|(x-y), ou seja, (x-y)=nk, $k \in Z$. Multiplicando a igualdade por (-1) tem-se que y-x = n(-k), $-k \in Z$. Logo n|y-x. Portanto $y \equiv x (mod\ n)$.

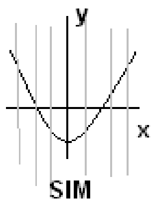
iii) Transitiva: Sim, pois se $x \equiv y$ (mod n) e $y \equiv z$ (mod n) tem-se que n|(x-y) e n|(y-z). Logo $x-y=nk_1$ (1), $k_1 \in Z$ e $y-z=nk_2$ (2), $k_2 \in Z$. Adicionando (1) e (2) tem-se que $x-z = n\,k_1 + n\,k_2 = n(k_1 + k_2)$. Como k_1 e k_2 são inteiros, $(k_1 + k_2)$ também é inteiro, assim $(k_1 + k_2) = k$, $k \in Z$. Logo x-z = nk, $k \in Z$. Portanto $x \equiv z(mod\ n)$.

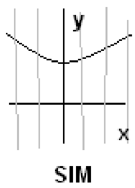
De i, ii e iii conclui-se que R é relação de equivalência.

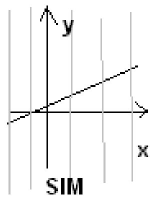
16. Verifique se as relações abaixo são aplicações, graficamente, no conjunto R dos números reais:

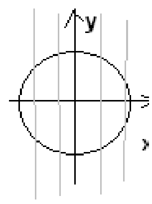
a) $x^3 = y$ **b)** $y = x^2 + 4x - 1$ **c)** $x^2 = y - 6x - 5$ **d)** $6y = x + 4$ **e)** $x^2 = 25 - y^2$; $y < 0$











(e) Não é função, pois existem elementos no domínio com duas imagens.

17. Considere as funções f, g e h, de R em R, definidas por:

$f(x) = x + 4$ $g(x) = x^2 - 5$ $h(x) = x^3 - x^2 - x$

Determine as compostas:

a) $(f \circ g) = f(g(x)) = f(x^2 - 5) = x^2 - 5 + 4 = x^2 - 1$

b) $(g \circ h) = g(h(x)) = g(x^3 - x^2 - x) = (x^3 - x^2 - x)^2 - 5$

c) $g \circ (f \circ h) = g(f(h(x))) = g(f(x^3 - x^2 - x)) = g(x^3 - x^2 - x + 4) = (x^3 - x^2 - x + 4)^2 - 5$

d) $(f \circ g) \circ h = (f \circ g)(h(x)) = (x^3 - x^2 - x)^2 - 1$

e) $(foh)og = f(h(g(x))) = f(h(x^2 - 5) = f((x^2 - 5)^3 - (x^2 - 5)^2 - (x^2 - 5)) = (x^2 - 5)^3 - (x^2 - 5)^2 - (x^2 - 5) + 4$

f) $f \circ (h \circ g) = (foh)og$ (item e).

18. Sejam S={a,b,c,d} e T={x,y,z}.

a) Dê exemplo de uma função de S em T que não seja sobrejetora nem injetora.

f1 = {(a,x),(b,x),(c,y),(d,y)}

b) Dê exemplo de uma função de S em T que seja sobrejetora mas não seja injetora.

f2 = {(a,x),(b,x),(c,y),(d,z)}

c) É possível encontrar uma função de S em T que seja injetora?

Não, pois o domínio possui mais elementos que o contra-domínio.

19. Para cada caso a seguir determine se a função é injetora, sobrejetora, ou ambos. Prove suas afirmações

a) f: Z→Z definida por $f(x) = x^2$

Injetora: Não, pois tome $x_1 = 3$ e $x_2 = -3$, $f(x_1) = f(x_2) = 9$ porém $x_1 \neq x_2$.
Sobrejetora: Não. Tome r = 8 um elemento do contra-domínio. Não existe nenhum inteiro tal que $x^2 = 8$. Portanto 8 não é imagem de nenhum elemento do domínio. Logo imagem ≠contra-domínio.

b) f:Z→Z definida por f(x)=10+x

Injetora: Sim, pois ∀ x1, x2 ∈ Z se f(x1) = f(x2) tem-se que 10 +x1 = 10+x2, ou seja x1 = x2.
Sobrejetora: Sim, pois ∀ r ∈ Z, existe x = r-10, x∈ Z, tal que f(x) = f(r-10) = 10 +(r-10) = r.

c) f: N→N definida por f(x)=10+x

Injetora: Sim, pois ∀ x1, x2 ∈ N se f(x1) = f(x2), ou seja, 10+x1=10+x2 temos que x1=x2.
Sobrejetora: Não, pois 0 ∈ N, mas 0 não é imagem de nenhum elemento do domínio. Logo imagem ≠contra-domínio.

d) f:Z→Z definida por f(x)=x/2 se x é par e f(x)=(x-1)/2 se x é ímpar

Injetora: Não, tome x1 = 0 e x2 = 1. Logo, f(x1) = 0/2 = 0 pois x1 é par, assim f(x1) = f(x2); f(x2) = (1-1)/2 = 0, pois x2 é ímpar, porém x1≠x2.
Sobrejetora: Sim. Considere r um elemento qualquer do contra-domínio Z. Se r for ímpar, tem-se que x = 2r +1, se r for par tem-se que x = 2r tal que:
i) f(x) = f(2r) = 2r/2 = r se x é par
ii) f(x) = f(2r+1) = (2r +1 -1)/2 = r se x é ímpar.
De i e ii conclui-se que qualquer elemento do contra-domínio é imagem de um elemento do domínio. Portanto, imagem = contradomínio.

e) f: Q→Q definida por $f(x) = x^2$

Injetora: Não, pois tome $x_1 = 3$ e $x_2 = -3$, $f(x_1) = f(x_2) = 9$ porém $x_1 \neq x_2$.
Sobrejetora: Não, tome r = -3 ∈ Q. Não existe x ∈ Q tal que f(x) = -3 ($x = \pm\sqrt{-3} \notin Q$). Logo imagem ≠contra-domínio.