UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – UFRPE

Matemática Discreta – Bacharelado em Sistemas de Informação
Respostas da 1ª Lista de Exercícios

As definições a seguir podem ser úteis na resolução de alguns exercícios.
- um quadrado perfeito é um inteiro n da forma $n=k^2$ *para algum inteiro k.*
- um número primo é um inteiro n > 1 que não é divisível por nenhum inteiro positivo diferente de 1 e de n.
- dizemos que um número a divide b e denota-se a/b *se se exite algum número inteiro k tal que b=ak.*
- dizemos que um número x é divisível por y se exite algum número inteiro k tal que x=yk.

1) Lógica Proposicional

a) Marque as frases a seguir que são proposições
- **A lua é feita de queijo verde. *Proposição***
- Ele é, certamente um homem alto.

Como "Ele" não está especificado, não exprime um pensamento completo, portanto não é proposição!
- O jogo vai acabar logo?

Também não se constitui proposição já que a frase não tem claramente valor verdadeiro ou falso!
- **X^2-4=0. *Proposição considere que x pertence ao conjunto dos números inteiros.***

b) Escreva cada uma das proposições compostas a seguir em notação simbólica usando letras de proposições para denotar suas componentes
- Se os preços subirem, então haverá muitas casas para vender e elas serão caras, mas se as casas não forem caras, então, ainda assim haverá muitas casas para vender.

Resp. preços subirem = A, haverá muitas casas para vender = B, casas serão caras = C

$[(A \to B) \wedge C)] \wedge (\neg C \to B)$

- Tanto ir dormir como ir nadar é uma condição suficiente para a troca de roupa, no entanto, mudar a roupa não significa que se vai nadar

Resp. dormir = A, nadar = B, trocar roupa = C

$[(A \vee B) \to C] \wedge [\neg(C \to B)]$

- Ou Jane irá vencer, ou se perder, ela ficará cansada.

Resp. vencer = A, perder = B e ficar cansada = C

$A \vee [B \to C]$

c) Escreva a negação de cada uma das sentenças a seguir:
- Se a comida é boa então o serviço é excelente.

Resp. A negação de: se A então B é logicamente equivalente a: A e não(B)
A comida é boa mas o serviço não é excelente

- Ou a comida é boa ou o serviço é excelente.

$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B) \therefore$ *TEOREMA DE MORGAN*

Resp. A comida não é boa e o serviço não é excelente.

- Nem a comida é boa e nem o serviço é excelente.

Resp. A comida é boa ou o serviço é excelente.

- Se é caro então a comida é boa e o serviço é excelente.

Resp. Considere: A = comida é boa, B = serviço é excelente e C= é caro
Se C então (A e B) é logicamente equivalente a: C e (não A ou não B)
É caro mas ou a comida não é boa ou o serviço não é excelente

d) Prove que $(x \wedge (x \rightarrow y)) \rightarrow y$ é uma tautologia

x	y	x→y	$x \wedge (x \rightarrow y)$	$[x \wedge (x \rightarrow y) \rightarrow y]$
V	V	V	V	**V**
V	F	F	F	**V**
F	V	V	F	**V**
F	F	V	F	**V**

Resp.: É uma tautologia, todas os resultados são Verdadeiros.

e) Verifique, utilizando o método da tabela verdade, se a sentença if [(if P then Q) or (if Q then R)] then (if P then R) é uma contradição.

P	Q	R	P→Q	Q→R	P→R	(P→Q)or(Q→R)	[(P→Q)or(Q→R)]→(P→R)
V	V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	F	F	V	**F**
V	F	V	F	V	V	V	**V**
V	F	F	F	V	F	V	**F**
F	V	V	V	V	V	V	**V**
F	V	F	V	F	V	V	**V**
F	F	V	V	V	V	V	**V**
F	F	F	V	V	V	V	**V**

Resp.: Não é uma contradição, pois não tivemos todos os resultados Falsos.

2) Quantificador Escreva as sentenças seguintes usando a notação de quantificador (isto é, use os símbolos ∃ e/ou ∀). Não se preocupe com a veracidade das sentenças.

a) Todo inteiro é primo.
Resp.: ∀x ∈ Z, x é primo
b) Há um inteiro que não é primo nem composto.
Resp.: ∃x ∈ Z, x não é primo nem composto.
c) Existe um inteiro cujo quadrado é dois.
Resp.: ∃x ∈ Z, x^2 = 2
d) Todos os inteiros são divisíveis por 5.
Resp.: ∀x ∈ Z, x é divisível por 5.
e) O quadrado de qualquer número inteiro é não negativo.
Resp.: ∀x ∈ Z, $x^2 \geq 0$.
f) Para todo inteiro x existe um inteiro y tal que xy=1.
Resp.: ∀x ∈ Z, ∃y ∈ Z | xy = 1
g) Existe um inteiro que quando multiplicado por qualquer outro inteiro, sempre dá o resultado 0.
Resp.: ∃x ∈ Z, ∀y ∈ Z, xy = 0.

3. Quantificador Assinale verdadeiro ou falso nas sentenças abaixo. Considerando o conjunto dos números inteiros, tem-se que:

a) ∀x, ∃y, x + y = 0. — ***Resp.: V basta fazer y = -x***
b) ∀x, ∀y, x + y = 0. — ***Resp.: Falso, x=2, y = 3, x+y = 5***
c) ∃x, ∀y, x + y = 0. — ***Resp.: Falso***
d) ∃x, ∃y, x + y = 0. — ***Resp.: V x = y = 0, x + y = 0***
e) ∀x, ∃y, xy = 0. — ***Resp.: V basta fazer y = 0***
f) ∀x, ∀y, xy = 0. — ***Resp.: Falso, x = 2, y = 3, xy = 6***
g) ∃x, ∀y, xy = 0. — ***Resp.: V x = 0***
h) ∃x, ∃y, xy = 0. — ***Resp.: V x = 0 e y = 1 ou x = 1 e y = 0***

4. **Métodos de Prova**. Prove que:

a) A soma de dois números inteiros ímpares é par. (Prova direta)

Sejam x e y números inteiros ímpares.
Logo $x = 2k_1 + 1$ e $y = 2k_2 + 1$ onde k_1 e $k_2 \in Z$.
Assim temos que $x + y = 2k_1 + 1 + 2k_2 + 1 = 2k_1 + 2k_2 + 2 = 2(k_1 + k_2 + 1)$.
Como k_1, k_2, 1 são números inteiros sua soma também é um número inteiro.
Desta forma podemos fazer $k = k_1 + k_2$, onde $x + y = 2k$, $k \in Z$.
Portanto, x + y é par.

b) A soma de dois números inteiros ímpares é par. (Prova por absurdo)

Sejam x e y números inteiros ímpares.
Logo $x = 2k_1 + 1$ e $y = 2k_2 + 1$ onde k_1 e $k_2 \in Z$.
Suponha por contradição que x + y é ímpar, assim $x + y = 2k_3 + 1$, $k \in Z$.
Daí temos que:
$x + y = 2k_1 + 1 + 2k_2 + 1 = 2k_3 + 1$
$= 2k_1 + 2k_2 - 2k_3 = 1 – 2$
$= 2(k_1 + k_2 – k_3) = - 1$
$= k_1 + k_2 – k_3 = -1/2$ ***Como k_1, k_2 e k_3 são inteiros a soma também é um inteiro***
$x+ y = k = -1/2$ $\rightarrow$ ***Absurdo! Pois k é um inteiro.***

c) A soma de um inteiro par com um inteiro ímpar é ímpar.

Seja x um inteiro par e y um inteiro ímpar, logo $x = 2k_1$ e $y = 2k_2 + 1$ onde k_1 e $k_2 \in Z$.
Assim $x + y = 2k_1 + 2k_2 + 1 = 2(k_1 + k_2) + 1$
Como k_1 e k_2 são inteiros então $(k_1 + k_2)$ também é um número inteiro, $k_1 + k_2 = k$, $k \in Z$.
Logo $x + y = 2k + 1$, $k \in Z$. Por tanto x + y é ímpar

d) Prove que um inteiro é ímpar se e somente se é a soma de dois inteiros consecutivos.

Um inteiro é ímpar see $x = k + (k + 1)$
$\rightarrow$ ***Se x é ímpar então $x = k + (k + 1)$***
Seja x um inteiro ímpar, logo $x = 2k + 1$, $k \in Z$.
Assim $x = k + (k + 1)$, $k \in Z$.
Portanto x é a soma de dois inteiros consecutivos. (I)
$\leftarrow$ ***Se $x = k (k + 1)$ então x é ímpar***
Seja x a soma de dois inteiros consecutivos, logo $x = k+(k + 1)$, $k \in Z$.
Assim $x = 2k + 1$, $k \in Z$. Portanto x é ímpar. (I I)

De (I)e (I I) podemos concluir que um inteiro é ímpar se e somente se é a soma de dois inteiros consecutivos.

e) O quadrado de um número par é divisível por 4.

Seja x um número inteiro par. Logo $x = 2k$, $k \in Z$.
Assim $x^2 = 4k^2$
Como k é inteiro, k^2 também é inteiro, com isso, $4 | x^2$
Portanto x^2 é divisível por 4.

f) Para todo inteiro *n* o número $3(n^2 + 2n + 3) – 2n^2$ é um quadrado perfeito.

Seja n um número inteiro, $3(n^2 + 2n + 3) – 2n^2 = 3n^2 + 6n + 9 – 2n^2 = n^2 + 6n + 9 = (n + 3)^2$
Como n e 3 são inteiros, (n + 3) é também inteiro.
Fazendo $(n + 3) = k$, tem-se que $3(n^2 + 2n + 3) – 2n^2 = k^2$, $k \in Z$.
Portanto, $3(n^2 + 2n + 3) – 2n^2$ é um quadrado perfeito.

g) Se um número x é positivo então x+1 também é. (Utilize contraposição).

Contrapositiva: Se $x + 1$ não é positivo então x não é positivo
Seja $x + 1$ um número não positivo, logo $x + 1 \leq 0$.
Subtraindo 1 de ambos os lados da igualdade tem-se que $x \leq - 1$
Portanto x não é positivo.

h) Se $x^2 +2x -3 =0$ então $x \neq 2$.

Seja $x^2 +2x -3 = 0$.
Suponha por contradição que $x = 2$
Substituindo $x = 2$ tem-se que $2^2 +2(2) -3 =0$
Assim temos que $5 = 0$ o que é Absurdo!
Portanto $x \neq 2$.

i) Se x é um número primo par então x=2.

Seja x um número primo e par.
Suponha por contradição que $x \neq 2$.
Como x é par, $x = 2k$, $k \in Z$.
Logo x é divisível por 2 e $x \neq 2$.
Portanto x não é primo contradizendo a hipótese.

j) Se dois inteiros são divisíveis por algum *n* então sua soma é divisível por *n.*

Sejam x e y divisíveis por algum inteiro n.
Logo $x = nk_1$ e $y = nk_2$, k_1 e $k_2 \in Z$.
Assim $x + y = = nk_1 + nk_2 = n(k_1 + k_2)$
Como k_1 e k_2 são inteiros então $(k_1 + k_2)$ também é inteiro
Fazendo $k = k_1 + k_2$, tem-se que $x+y = nk$, $k \in Z$.
Portanto $x + y$ é divisível por n.

k) Sejam a, b e c e d inteiros se $a|b$ e $c|d$ então $ac|bd$

Sejam a, b, c e d inteiros.
Suponha que $a|b$ e $c|d$.
Logo $b = a\, k_1$ e $d = c\, k_2$, k_1 e $k_2 \in Z$.
Fazendo b.d tem-se que: $b.d = a\, k1.c\, k_2. = ac(k_1 k_2)$
Como k_1 e k_2 são inteiros $(k_1 k_2)$ também é um inteiro, logo $(k_1 k_2) = k$
Assim tem-se que $b.d = ac.k$, $k \in Z$.
Portanto, ac / bd

5. Contra-Exemplo

a) Um inteiro x é positivo se e somente se x+1 é positivo

Tome $x = 0$. Logo $x + 1$ é positivo, mas x não é positivo.

b) Se a e b são inteiros com a | b, então a≤b.

Tome $a = 2$ e $b = -2$. Logo $a|b$ e $a >b$.

c) Se a e b são inteiros não negativos com a | b, então a≤b.

Tome $a = 2$ e $b = 0$. Logo $2|0$ mas $2 >0$.