Matemática Discreta – Bacharelado em Sistemas de Informação
3ª Lista de Exercícios

Nome ____ Nota _________

Relações e Funções

Os dados a seguir podem ser úteis na resolução de alguns exercícios.

- x| y se e somente se existe algum inteiro k tal que y = xk

1) Para cada uma das relações a seguir, em $\Re$,desenhe uma figura para mostrar a região do plano que a descreve.
   a) $x \, R \, y \longleftrightarrow y \leq 2$
   b) $S = \{(x,y) \in \Re \times \Re \mid 2x + 3y - 6 \leq 0\}$

2) São dados A={5,6,7,8} e B={a, b, c}. Seja R a seguinte relação de A para B: R = {(5,b), (5,c) (7,b) (8,a) (8,c)}
   a) Determine a matriz da relação.
   b) Desenhe o diagrama de setas de R
   c) Ache a relação inversa R^{-1} de R
   d) Determine o domínio e a Imagem de R

3) Seja A={1,2,3,6,8,9} e seja a relação em A definida por "x divide y", escrita x | y .
   a) Escreva R como um conjunto de pares ordenados
   b) Desenhe seu grafo orientado
   c) Ache a relação inversa R^{-1}de R. R^{-1} pode ser descrita em palavras? Como?

4) Sejam A={4,5,6}, B={a,b,c} e C={x,y,z} R={(4,a) (4,c) (5,a) (6,b)} e S={(a,x) (a,y) (a,z) (c,x)}.
   a) Ache, se for possível, a relação composta RoS.
   b) Ache, se for possível, a relação composta SoR.
   c) Ache as matrizes MR, MS, MRoS.
   d) Desenhe o diagrama de setas das relações R e S. Observe os caminho de 4 e 5 para x, y e z.

5) Considere as seguintes relações em um conjunto A={3, 4, 5}. Determine se as relações são reflexivas, anti-reflexivas, simétricas, transitivas ou anti-simétricas. E quais desses conjuntos possuem uma relação de equivalência?
   a) R={(3,3) (3,4) (3,5) (5,5)}
   b) B={(3,3) (3,4) (4,3) (4,4) (5,5)}
   c) T={(3,3) (3,4) (4,4) (4,5)}
   d) $V = \emptyset$
   e) $C = A \times A$

6) Determine se as relações abaixo são reflexivas, simétricas, anti-simétricas ou transitivas.**(OBS: o conjunto S a partir da letra c é o conjunto de pessoas no Brasil)**

a) $S = \mathbb{Z}$
   $x\ R\ y \iff x - y$ é múltiplo inteiro de 3.

b) $S = \mathbb{N}$
   $x\ R\ y \iff x.y$ é par.

c) $x\ R\ y \iff$ x tem a mesma altura que y.

d) $x\ R\ y \iff$ x é mais alto que y.

e) $x\ R\ y \iff$ x é irmão de y.

f) $x\ R\ y \iff$ x é casado com y.

7) Prove que:
   a) Se R é uma relação de equivalência em um conjunto S então R^{-1} também é.
   b) Se R é uma relação anti-simétrica em um conjunto S, então R^{-1} é anti-simétrica.

8) Consideremos o conjunto E de todas as retas de um plano e seja R a relação definida por X R Y se e somente se, X for perpendicular a Y. Esta relação é uma relação de equivalência?

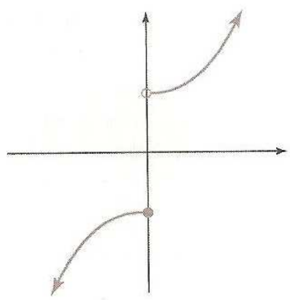
9) Prove que a relação “é congruente com módulo n” é uma relação de equivalência no conjunto dos números inteiros.

10) Seja R a seguinte relação de equivalência no conjunto A={1,2,3,4,5,6}
R={(1,1) (1,5) (2,2) (2,3) (2,6) (3,2) (3,3) (3,6) (4,4) (5,1) (5,5) (6,2) (6,3) (6,6)}
Ache a partição induzida por R, isto é ache as classes de equivalência de R.

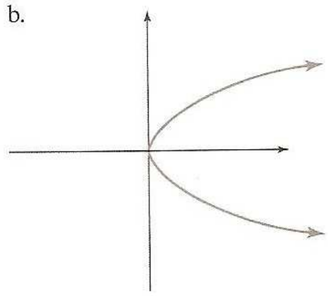
11) Verifique se as relações abaixo são aplicações, graficamente, no conjunto R dos números reais:
   a) $y = x^3-1$ b) $y = -x^2 - 1$ c) $y - 2x = 3$ d) $x^2 = 25 - y^2;\ y < 0$ e) $-x^2+4x-4$

12) As figuras a seguir ilustram diversas relações binárias $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Quais delas são funções?

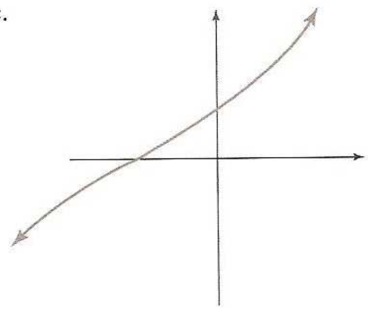
a.



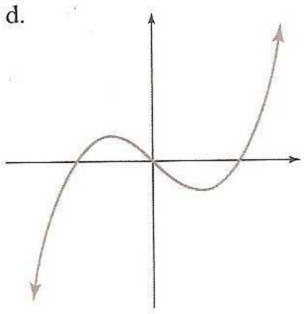
b.



c.



d.



13) Considere as funções f, g e h, de R em R, definidas por:

$f(x) = x^2+1$ $\qquad$ $g(x) = 2x-3$ $\qquad$ $h(x) = x^3 - x^2$

a) (g o f) $\quad$ b) g(h(x)) $\quad$ c) g o (f o h) $\quad$ d) (f o g) o g
e) (f o h) o g $\quad$ f) f o (h o g)

14) Para cada caso a seguir determine se a função é injetora, sobrejetora, ou ambos. Prove suas afirmações.

a) f: Z→Z definida por $f(x) = x^2+1$
b) f:Q→Q dada por f(x) = 3x+4
c) f: N→N definida por f(x)=x+7
d) f: N→N definida por $f(x) = 2^x$
e) f:{1,2,3}→{p,qr}, onde f = {(1,q) (2,r) (3,p)}
f) f:Z→Z definida por f(x)=x/2 se x é par e f(x)=(x-1)/2 se x é ímpar