



Resolução – Lista 1

Monitoria: Bruna

1) Lógica Proposicional

- a) Marque as frases que forem proposições:
- Não fume! **Não é uma proposição, pois nesta sentença o valor lógico atribuído não será claramente verdadeiro ou falso.**
 - Quatro é maior que cinco. **É proposição.**
 - Ela é, certamente uma mulher inteligente. **Como “Ela” não está especificada, não exprime um pensamento completo, portanto não é proposição! Se estiver claro quem é “Ela”, será proposição!**
 - $X-2=3$ (No conjunto dos inteiros) **É proposição, considerando que o valor de x é dado.**
- b) Escreva cada uma das proposições compostas a seguir em notação simbólica usando letras de proposições para denotar suas componentes:
- Se Jane vencer ou perder, vai ficar cansada.
A- Vencer, B- perder, C- ficar cansada
 $(A \vee B) \rightarrow C$
 - Ou Jane irá perder ou, se vencer, ela ficará cansada.
A- Vencer, B- perder, C- ficar cansada
 $B \vee (A \rightarrow C)$
 - Tanto ir passear como ir dormir é uma condição suficiente para a troca de roupa, no entanto, mudar a roupa não significa que se vai dormir.
A - passear, B - dormir, C- trocar roupa
 $[(A \vee B) \rightarrow C] \wedge [\neg (C \rightarrow B)]$
- c) Numa fábrica temos três funcionários que afirmam o seguinte:
Adalberto: “Se Cleber não foi ao trabalho, então José também não foi.”
Cleber: “ Adalberto não foi ao trabalho mas José foi.”
José: “Eu fui ao trabalho, mas Cleber ou Adalberto não foram.”
Sejam as seguintes afirmações:
p: Adalberto foi ao trabalho.
q: Cleber foi ao trabalho.
r: José foi ao trabalho.
Responda as questões seguintes usando tabela-verdade:
- Se todos foram trabalhar, quem mentiu?
 - Se todos disseram a verdade, quem não foi ao trabalho?
(Dica o ideal é estabelecer uma fórmula lógica dos argumentos de cada um e depois uma tabela-verdade dos mesmos)

Adalberto: “Se Cleber não foi ao trabalho, então José também não foi.”

Fórmula lógica: $\sim q \rightarrow \sim r$

Explicação: O “não q” deve aparecer, pois o antecedente está negando a proposição q (Cleber foi ao trabalho), logo se segue o sinal da condicional, pois analisando a frase, temos



“Se... então”, isso nos remete à ideia de condição. O “não r” aparece por último, pois ocorre a negação da premissa r (José foi ao trabalho).

Tabela-verdade de Adalberto ($\sim q \rightarrow \sim r$)

P	Q	R	$\sim q$	$\sim r$	$\sim q \rightarrow \sim r$
V	v	V	f	f	v
V	v	F	f	v	v
V	f	V	v	f	f
V	f	F	v	v	v
F	v	V	f	f	v
F	v	F	f	v	v
F	f	V	v	f	f
F	f	F	v	v	v

Cleber: “Adalberto não foi ao trabalho, mas José foi.”

Fórmula lógica: $\sim p \wedge r$

Explicação: Primeiro deve-se utilizar o “não p”, pois a primeira premissa está negando o valor da afirmação p (“Adalberto foi ao trabalho.”). Depois deve-se utilizar o símbolo da conjunção (\wedge), pois o advérbio “mas” (“... mas José foi”), também é uma conjunção. Por último, utiliza-se a afirmação r, simbolizando a afirmação “José foi ao trabalho.”

Tabela-verdade de Cleber ($\sim p \wedge r$)

P	Q	R	$\sim p$	$\sim p \wedge r$
V	v	V	f	f
V	v	F	f	f
V	f	V	f	f
V	f	F	f	f
F	v	V	v	v
F	v	F	v	f
F	f	V	v	v
F	f	F	v	f

José: “Eu fui ao trabalho, mas Cleber ou Adalberto não foram.”



Fórmula lógica: $r \wedge (\sim q \vee \sim p)$

Explicação: Primeiramente coloca-se a afirmação r (“José foi ao trabalho”), logo se segue o operador de conjunção, pois há a presença do “mas” (“... mas Cleber ou Adalberto não foram.”). Há uma disjunção (\vee) entre as afirmações q e p (“Cleber ou Adalberto”), sendo que as duas afirmações estão negadas (“não q ” ou “não p ”), pois “Cleber ou Adalberto não foram”.

Tabela-verdade de José ($r \wedge (\sim q \vee \sim p)$)

P	Q	R	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim q \vee \sim p)$	$r \wedge (\sim q \vee \sim p)$
V	v	v	F	f	f	f
V	v	f	F	f	f	f
V	f	v	F	v	v	v
V	f	f	F	v	v	f
F	v	v	V	f	v	v
F	v	f	V	f	v	f
F	f	v	V	v	v	v
F	f	f	V	v	v	f

Tabela-verdade geral

P	Q	R	Aldalberto $\sim q \rightarrow \sim r$	Cleber $\sim p \wedge r$	José $r \wedge (\sim q \vee \sim p)$
V	v	V	v	f	f
V	v	F	v	f	f
V	f	V	f	f	v
V	f	F	v	f	f
F	v	V	v	v	v
F	v	F	v	f	f
F	f	V	f	v	v
F	f	F	v	f	f

- Se todos foram trabalhar, quem mentiu?

Se todos foram trabalhar, então primeiro deve-se analisar as afirmações p , q e r . Todas estas afirmações precisam ser verdadeiras, portanto a linha que deve ser analisada é a primeira. Para saber quem mentiu, basta estudar os valores que cada funcionário apresenta na primeira linha da tabela. Os valores que são obtidos então são Adalberto(v), Cleber(f) e José(f). Então Cleber e José mentiram.



- Se todos disseram a verdade, quem não foi ao trabalho?

Se todos disseram a verdade, então a linha que será analisada é a que apresenta todos os valores verdadeiros em Adalberto, Cleber e José. A quinta linha é a linha em que todos os valores verdadeiros se encontram, portanto, é nesta linha que se encontra a resposta a esta questão.

Segundo os valores das afirmações da quinta linha, somente p está como falso, ou seja, somente Adalberto não foi ao trabalho.

- d) Classifique as sentenças lógicas abaixo, como tautologia, contradição ou sentença satisfatória:

Tautologia: Proposições cujo valor lógico é sempre verdadeiro.

Contradição: Proposições cujo valor lógico é sempre falso.

Sentença satisfatória (também conhecido como contingência): Quando uma proposição, possui valores lógicos verdadeiros e falsos.

- $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

P	Q	$\neg P$	$(P \rightarrow Q)$	$(\neg P \vee Q)$	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
v	v	f	V	v	v
v	f	f	F	f	v
f	v	v	V	v	v
f	f	v	V	v	v

Tautologia.

- $\sim(p \vee q) \wedge (p \wedge q)$

Usando a lei de Morgan $\sim(p \vee q) = (\sim p \wedge \sim q)$, temos a seguinte tabela verdade:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \vee q) \wedge (p \wedge q)$
v	v	f	f	f	v	f
v	f	f	v	f	f	f
f	v	v	f	f	f	f
f	f	v	v	v	f	f

Contraposição.

- $(P \wedge (Q \vee \neg Q)) \rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q))$

P	Q	$\neg Q$	$Q \vee \neg Q$	$P \wedge (Q \vee \neg Q)$	$(P \wedge Q)$	$(P \wedge \neg Q)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$	$(P \wedge (Q \vee \neg Q)) \rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q))$
v	v	f	v	v	v	f	v	v
v	f	v	v	v	f	v	v	v
f	v	f	v	f	f	f	f	v
f	f	v	v	f	f	f	f	v



Tautologia.

- [p and (if p then q)] or [if p then NOT q]

p	q	~q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$p \rightarrow \sim q$	$P \wedge (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \sim q)$
v	v	f	v	v	f	v
v	f	v	f	f	v	v
f	v	f	v	f	v	v
f	f	v	v	f	v	v

Tautologia.

2) Quantificador Escreva as sentenças seguintes usando a notação de quantificador (isto é, use os símbolos \exists e/ou \forall). Apresente a negação de cada sentença. *Obs: Não se preocupe com a veracidade das sentenças.*

- Todos os inteiros são divisíveis por 1.
 $\forall x \in \mathbb{Z}, x$ é divisível por 1.
- Há um inteiro que quando dividido por 3 sempre é igual a 9.
 $\exists x \in \mathbb{Z}, x/3=9$.
- Todo inteiro é par.
 $\forall x \in \mathbb{Z}, x$ é par.
- Existe um inteiro cujo cubo é 81.
 $\exists x \in \mathbb{Z}, x^3=81$.
- Para todo inteiro existe outro inteiro, que quando são multiplicados o resultado é sempre igual à zero.
 $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, xy=0$.

3) Quantificador Assinale as questões abaixo como verdadeiras ou falsas. Considere x e y números inteiros. Justifique suas respostas.

- $\exists x (\exists y (y + 1 < x))$. **Verdadeiro. tome $x=y+2$**
- $\forall x (\forall y (x > y))$. **Falso, basta exibirmos valor que não satisfaz. Por ex, $x=2, y=1$.**
- $\forall x, x^2 \geq 0$. **Verdadeiro, todo número elevado ao quadrado é maior ou igual a zero.**
- $\exists x, \exists y, x^2 = y$. **Verdadeiro. Por ex: $x=3, y=9$**
- $(\forall x)(\exists y)(x + y = x)$. **Verdadeiro, tome $y=0$**
- $\forall x, \forall y, x$ é par se $x = 2y$. **Verdadeiro. (definição de no par)**

4) Métodos de Prova. Prove que:

- Se a soma de dois inteiros é par, então a diferença entre esses dois números também é par.
Sejam x e y números inteiros, tal que $x + y$ é par. Pela definição de par $x + y = 2k_1$, $k_1 \in \mathbb{Z}$. Se subtrairmos ambos os lados por $2y$, obteremos
 $x + y - 2y = (2k_1 - 2y)$
 $x - y = 2(k_1 - y)$, como k_1 e y são números inteiros, sua subtração também terá como resultado um número inteiro. Desta forma podemos fazer $k_1 - y = k$. Assim, $x - y = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Portanto $x - y$ é par.

- Se n é um inteiro ímpar, então n^2 é ímpar.



Seja n um número inteiro ímpar. Pela definição temos que $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Se elevarmos ambos os lados ao quadrado, teremos:
 $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 2k \cdot 1 + 1 = 2(2k^2 + k) + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Como k é um inteiro sua soma também será um número inteiro. Fazendo $k_1 = (2k^2 + k)$, tem-se $n^2 = 2k_1 + 1$, $k_1 \in \mathbb{Z}$.

Portanto n^2 é ímpar.

- c) Se a e b são ambos quadrados perfeitos então $a \cdot b$ também é.

Assumindo a e b sejam quadrados perfeitos temos que, $a = m^2$ e $b = n^2$, m e $n \in \mathbb{Z}$. Multiplicando a por b , temos: $a \cdot b = m^2 \cdot n^2$. Pela regra da associatividade e comutatividade da multiplicação, implica que $a \cdot b = (m \cdot n)^2$. Como m e n , $\in \mathbb{Z}$ sua multiplicação também será um número inteiro. Fazendo $m \cdot n = k$, tem-se que $a \cdot b = k^2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Portanto $a \cdot b$ é um quadrado perfeito.

- d) Se $x^2 - x - 2 = 0$ então $x \neq 0$.

Seja $x^2 - x - 2 = 0$. Suponha por contradição que $x = 0$. Substituindo x por 0 , tem-se que $0^2 - 0 - 2 = 0$. Assim temos que $-2 = 0$ o que é um absurdo!

Portanto $x \neq 0$.

- e) Seja n é um inteiro. Se $3n + 2$ é ímpar então n é ímpar. (Prova por contraposição)

Sentença contrapositiva: Se n é par então $3n + 2$ é par.

Seja n um número inteiro par. Pela definição de número par temos que $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Multiplicando ambos os lados por três temos $3n = 3(2k)$. Adicionando 2 de ambos os lados da igualdade, obteremos $3n + 2 = 3(2k) + 2$. Reescrevendo temos, $3n + 2 = 2(3k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Desta maneira como k é um inteiro a equação $3k + 1$ também será. Logo a definição de par é obedecida.

Portanto $3n + 2$ é par. Assim, a sentença original também está provada, já que provamos sua contrapositiva, que é uma sentença logicamente equivalente.

- f) Se $z = xy$, onde x e y são inteiros positivos, então $x \leq \sqrt{z}$ ou $y \leq \sqrt{z}$. (Prova por contraposição)

Sentença contrapositiva: Se $x > \sqrt{z}$ e $y > \sqrt{z}$ então $z \neq xy$.

Assumindo que x e y são números inteiros positivos e que $x > \sqrt{z}$ e $y > \sqrt{z}$. Se multiplicarmos ambos os lados da sentença $x > \sqrt{z}$, por y temos $x \cdot y > \sqrt{z} \cdot y$. Como $y > \sqrt{z}$, conclui-se que:

$x \cdot y > \sqrt{z} \cdot y$. Assim $x \cdot y > z$, isso mostra que $z \neq xy$.

Portanto como as sentenças são equivalentes, isso mostra que se $z = xy$, onde x e y são inteiros positivos, então $x \leq \sqrt{z}$ ou $y \leq \sqrt{z}$.

- g) O inteiro n é par se e somente se n^2 é par.

i. Ida: Se n é um número inteiro par então n^2 é par.

Seja n um número inteiro par, podemos escrevê-lo segundo a definição de par como $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Se elevarmos ambos os lados ao quadrado, temos

$$n^2 = (2k)^2$$

$$n^2 = 4k^2$$

$n^2 = 2(2k^2)$.) número $(2k^2)$ também é um número inteiro. Fazendo,

$k_1 = (2k^2)$, tem-se que $n^2 = 2k_1$, $k_1 \in \mathbb{Z}$. Logo n^2 é par.

Portanto se n é um inteiro par então n^2 também é.



ii. Volta: Se n^2 é par então n é par.

Prova por contraposição:

Sentença contrapositiva: Se n é ímpar então n^2 é ímpar.

Assumindo n um número inteiro ímpar. Pela definição temos que $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Se elevarmos ambos os lados ao quadrado, teremos: $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 2k \cdot 1 + 1 = 2(2k^2 + k) + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Como k é um inteiro o número $(2k^2 + k)$ também será um número inteiro. Logo n^2 é ímpar, assim podemos concluir que se n^2 é par então n é par, devido as sentenças serem logicamente equivalentes.

De i e ii podemos concluir que um inteiro n é par se e somente se n^2 é par.

h) Sejam a, b e c e d inteiros se $a|b$ e $c|d$ então $ac|bd$.

Assumindo a, b, c e d números inteiros. Supondo que $a|b$ e $c|d$. Logo $b = a.k_1$ e $d = c.k_2$, k_1 e $k_2 \in \mathbb{Z}$. Multiplicando b por d , teremos $b.d = (a.k_1).(c.k_2) = a.c.(k_1.k_2)$. Como $k_1.k_2$ são números inteiros, a multiplicação entre eles também será um número inteiro, logo $(k_1.k_2) = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim temos que $b.d = a.c.k$

Portanto, $ac|bd$.

i) Prove que um inteiro é ímpar se e somente se é a soma de dois inteiros consecutivos.

n é um número inteiro ímpar se e somente se $n = k+(k+1)$.

i. Ida: Se n é um inteiro ímpar então $n = k+(k+1)$.

Sendo n um número inteiro ímpar, logo pela definição de números ímpares temos que, $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$. Organizando a equação obteremos $n = k+(k+1)$.

Portanto $n = k+(k+1)$.

ii. Volta: Se $n = k+(k+1)$ então n é ímpar.

Assumindo $n = k + (k+1)$, k e $n \in \mathbb{Z}$. Assim, temos $n = 2k + 1$.

Portanto n é ímpar.

De i e ii podemos concluir que um inteiro é ímpar se e somente se é a soma de dois inteiros consecutivos

j) O cubo de um número inteiro par é divisível por oito.

Seja n um número inteiro par. Logo, $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Elevando ambos os lados ao cubo, obtemos $n^3 = (2k)^3 = 8k^3$. Como k é um inteiro, logo k^3 também é. Portanto n^3 é divisível por oito.

k) Prove que a soma do cubo de três números naturais consecutivos é divisível por 3.

Seja n um número natural, considerando-o o termo central, temos que $n-1$ é o número anterior e $n+1$ o posterior. Elevando cada número ao cubo e posteriormente somando temos que, $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2)$. Como $n \in \mathbb{N}$, $n(n^2 + 2)$, também faz parte desse conjunto numérico. Fazendo, $k = n(n^2 + 2)$, tem-se que $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Portanto $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3$ é divisível por 3.

l) Se dois inteiros são divisíveis por algum inteiro n , então sua soma é divisível por n .

Assumindo a e b números inteiros divisíveis por n , podemos afirmar que, $a = n.k_1$, $b = n.k_2$, k_1 e $k_2 \in \mathbb{Z}$. Somando as equações temos que, $a + b = n.k_1 +$



$n \cdot k_2$, colocando n em evidência obteremos, $a + b = n \cdot (k_1 + k_2)$, como k_1 e $k_2 \in \mathbb{Z}$, logo a soma também pertence a este conjunto.

Portanto $a+b$ é divisível por n .

m) O produto de dois inteiros consecutivos quaisquer é par.

Sejam n e $(n+1)$ dois inteiros consecutivos. Então, um será um número par e outro um número ímpar. Multiplicando esses dois valores, obteremos $2k(2k+1) = 2(2k^2 + k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Como k é um inteiro isso implica que $(2k^2 + k)$ também é um inteiro.

Portanto o produto entre n e $(n+1)$ é par.

n) O quadrado de algum inteiro ímpar é igual a $8k + 1$ para algum inteiro k .

Seja n um número inteiro ímpar, pela definição temos que $n = 2k_1 + 1$, $k_1 \in \mathbb{Z}$. Elevando ao quadrado ambos os lados, teremos $n^2 = (2k_1 + 1)^2 = 4k_1^2 + 4k_1 + 1 = 4k_1(k_1 + 1) + 1$. Analisando a equação podemos perceber que, $k_1(k_1 + 1)$ é um produto entre dois números inteiros consecutivos, como mostramos no exercício da letra m, esse produto gera um número par. Assim podemos fazer a seguinte substituição, $n^2 = 4(2k_1) + 1 = 8k_1 + 1$, $k_1 \in \mathbb{Z}$.

Portanto um número inteiro ímpar ao quadrado é igual a $8k + 1$ para algum inteiro k .

5) Contra-Exemplo.

a) Considere a e b números inteiros. Se $a^2 = b^2$ então $a=b$.

Supondo $a^2 = b^2 = 4$ nesse caso a ou b poderiam ser 2 ou -2 , porém $2 \neq -2$. Logo, se $a^2 = b^2$ não necessariamente $a = b$.

b) Se a e b são inteiros não negativos com $a \mid b$, então $a \leq b$.

Tome $a = 4$ e $b = 0$. Logo $4 \mid 0$, porém $a > b$ ($4 > 0$).

c) Todo inteiro positivo é a soma dos quadrados de dois inteiros.

Tome 7 como contra-exemplo, observaremos que não existe dentro do conjunto dos números inteiros dois termos que somados tem como resultado esse número.

d) Se a , b e c são inteiros positivos então $a^{(b^c)} = (a^b)^c$.

Tomando $a = 2$, $b = 3$ e $c = 4$. Substituindo, tem-se que $2^{(3^4)} = 2^{81}$ e $(2^3)^4 = 2^{12}$. Logo $a^{(b^c)} \neq (a^b)^c$ ($2^{(3^4)} \neq 2^{81}$)

e) Sejam a , b e c números inteiros. Se $a \mid bc$ então $a \mid b$ ou $a \mid c$

Tome $a=10$, $b=5$ e $c=2$. Logo $10 \mid (2 \cdot 5)$ mas 10 não divide 5 e nem divide 2 .