RESOLUÇÃO - 5ª Lista de Exercícios

Nome ____ Nota __________

ANÁLISE COMBINATÓRIA

1) De quantas maneiras diferentes 11 homens e 8 mulheres podem se sentar em uma fila se os homens sentam juntos e as mulheres também?
2!*11!*8!

2) O controle de qualidade quer verificar 25 processadores dos 300 produzidos por dia. De quantas maneiras isso pode ser feito?
C(300,25) = 300!/25!*(300-25)! = 300!/25!*275!

3) De quantas maneiras pode-se selecionar um júri de 12 pessoas em um conjunto de 17 homens e 23 mulheres considerando que o júri tenha
   a) 5 homens e 7 mulheres.
   C(17,5) * C(23,7) = (17!/5!(17-5)!) * (23!/7!(23-7)! = (17!/5!*12!)*(23!/7!*16!)
   b) Pelo menos 1 homem.
   C(40,12) – C(17,0)*C(23,12)
   c) No mínimo 1 mulher.
   C(40,12) – C(23,0)*C(17,12)

4) Quantos números pares de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9? Lembre-se de retirar os números que possuem zero como 1º algarismo.

_ _ _
9 * 9 * 8 = 648 é o total de possibilidades (números ímpares ou pares).

_ _ _
8 * 8 * 5 = 320 Total de números ímpares de 03 algarismos.

648 – 320 = 328

5) De quantas maneiras podemos escolher uma comissão de três elementos num conjunto de 10 pessoas?
C(10,3) = 10!/3!*7! = 10.9.8.7!/3.2.1.7! = 120

6) Considere os números inteiros maiores que 64000 que possuem 5 algarismos, todos distintos, e que não contem os dígitos 3 e 8. Qual será a quantidade desses números?

Os número são diferentes de 3 e de 8
(7 ou 9)
2 * 7 * 6 *5 * 4 = 1680
6
1 * 4 * 6 * 5 * 4 = 480

1680 +480 = 2160

7) Considere cinco pontos, três a três não colineares. Usando esses pontos como vértices de um triângulo. Qual a quantidade de triângulos distintos que se pode formar?
C(5,3) = 5!/3!*2! = 10

8) Quantos são os anagramas da palavra ALUNO?
a) Sem restrições.
P(5) = 5! =120
b) que as consoantes devem estar juntas.
P(4)*P(2) = 4!*2!
c) que as letras LU permanecem juntas e nessa ordem.
P(4) = 4!
d) que começam com vogal e terminam com consoante.
3 3 2 1 2 = 36

9) Determine o número de anagramas da palavra MATHEMATICS.
a) Sem restrições.
11!/(2!*2!*2!)
b) que terminam com as letras T,C,S juntas e nesta ordem.

8!/(2!*2!)

c) que terminam com as letras T,C,S juntas e em qualquer ordem.
8!*3!/(2!*2!)

10) De quantos maneiras 8 crianças podem brincar de roda? E se na próxima rodada da brincadeira João e Maria tiverem que ficar juntos, de quantas maneiras isso ocorrerá com as mesmas 8 crianças?
8!/8 = 7! Ou (8 -1)! = 7!
2!(7 – 1)! = 2!*6!

11) Dê quantas maneiras podemos formar 10 times com 10 jogadores em um conjunto de 100 jogadores?

$$\frac{100!}{10!.(10!)^{10}}$$

12) Com os algarismos 3, 4, 5, 6 e 7 podem ser formados

a) quantos números de 5 algarismos distintos?
5*4*3*2*1

b) quantos números ímpares de 5 algarismos distintos?
4*3*2*1*3

c) Quantos números pares de 5 algarismos distintos?
4*3*2*1*2

d) Quantos números de algarismos distintos maiores que 40.000

(5,6,7) _ _ _ _ _
3 *4 * 3 *2 * 1 = 72

4 _ _ _ _
1 * 4 * 3 * 2 * 1 = 24

72+24= 96

13) Desenvolver os seguintes binômios:

n	Triângulo de Pascal
0	1
1	1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1

a. $(x + 2)^4$

a = x , b = 2, n = 4

$$\binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}2x^3+\binom{4}{2}4x^2 + \binom{4}{3}8x+\binom{4}{4}16=$$

$$1.x^4 + 4.2x^3+6.4x^2 + 4.8x+1.16=$$

$$= x^4 + 8x^3+24x^2 + 32x+16$$

b. $(x - \sqrt{2})^6$

Lembrem que $(x - \sqrt{2}) = x + (-\sqrt{2})$

a = x , b = - $\sqrt{2}$**, n = 6**

$$\binom{6}{0}x^6 + \binom{6}{1}-\sqrt{2}.x^5+\binom{6}{2}2x^4 + \binom{6}{3}.-2\sqrt{2}x^3+\binom{6}{4}.4x^2+\binom{6}{5}-4\sqrt{2}x + \binom{6}{6}.8$$

$$x^6 + 6.-\sqrt{2}.x^5+15.2x^4 + 20.-2\sqrt{2}x^3+15.4x^2+6.-4\sqrt{2}x +1.8$$

$$x^6 - 6\sqrt{2}.x^5+30x^4 -40\sqrt{2}x^3+60x^2-24\sqrt{2}x +8$$

c. $(x^2+\frac{y}{2})^4$

$a = x^2$, $b = \frac{y}{2}$, **n = 4**

$$\binom{4}{0}x^8 + \binom{4}{1} x^6 . \frac{y}{2} + \binom{4}{2}x^4 . \frac{y^2}{4} + \binom{4}{3} x^2 . \frac{y^3}{8} + \binom{4}{4}\frac{y^4}{16}$$
$$x^8 + 4.\ x^6 . \frac{y}{2} + 6.x^4 . \frac{y^2}{4} + 4x^2 . \frac{y^3}{8} + \frac{y^4}{16}$$
$$x^8 + 2x^6 .\ y + x^4 . \frac{3y^2}{2} + x^2 . \frac{y^3}{2} + \frac{y^4}{16}$$

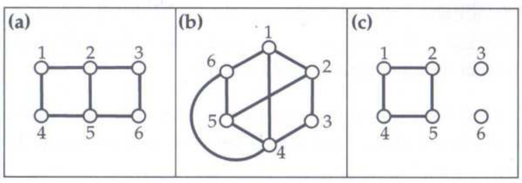
d. $(2x - y)^5$

a = x , b = -y, n = 5

$$\binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1} -y.x^4 + \binom{5}{2} y^2 .\ x^3 + \binom{5}{3} . -y^3 .x^2 + \binom{5}{4} .\ y^4 .x + \binom{5}{5} . -y^5$$
$$x^5 - 5y.x^4 + 10\ y^2 .\ x^3 - 10y^3 .x^2 + 5.\ y^4 .x - y^5$$

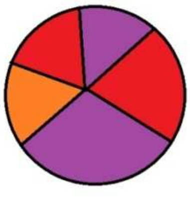
GRAFOS

1. As figuras a seguir representam grafos. Escreva cada um deles como um par de conjuntos *(V, E)*.



(a) **V = {1,2,3,4,5,6}**
E = {{1,2},{1,4},{2,5},{2,3},{3,6},{5,6},{4,5}}
(b) **V= {1,2,3,4,5,6}**
E = {{1,2},{1,6},{1,4},{2,3},{2,5},{3,4},{4,5},{4,6},{5,6}}
(c) **V= {1,2,3,4,5,6}**
E = {{1,4},{1,2},{2,5},{4,5}}

2. Se três países em um mapa se delimitam uns com os outros, então o mapa certamente exige ao menos três cores. (Por exemplo, consideremos o Brasil, a Venezuela e a Colômbia, ou a França, a Alemanha e a Bélgica.)
Elabore um mapa em que não haja três países que se delimitem uns com os outros e que, no entanto, exija no mínimo três cores.



3. Quantas arestas há em K_n, um grafo completo em *n* vértices?

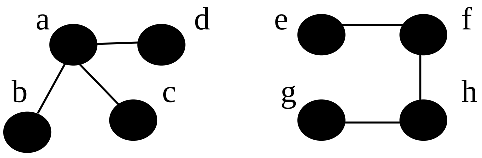
$$= \binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!\ 2!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!\ 2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

4. Sejam G e H grafos. Dizemos que G é *isomorfo a H se e* somente se existe uma bijeção *f* : *V(G)* —> *V(H)* tal que, para todo *a, b* ∈ *V(G)* tenhamos *a* ~ *b* (em G) se e somente *se f (a)* ~ *f (b)* (em H). A função *f é* chamada um *isomorfismo* de G para H.
Podemos imaginar *f* como uma re-designação dos vértices de G com os nomes dos vértices em *H*, mas de tal maneira que a adjacência seja preservada. De modo menos formal, os grafos isomorfos têm a mesma figura (exceto quanto aos nomes dos vértices).
Faça o seguinte:

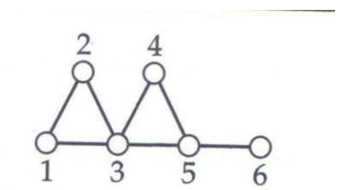
a) Prove que grafos isomorfos têm o mesmo número de vértices.
Como f é sobrejetora e injetora, significa dizer que V(G) e V(H) têm o mesmo número de elementos. Portanto, eles têm o mesmo número de vértices.

b) Prove que se *f* : *V(G)* —> *V(H) é* um isomorfismo de grafos G e H e se *v* ∈ *V(G)*, então o grau de *v* em G é igual ao grau de *f (v)* em *H.*
Como f é um isomorfismo, temos que u ~ v em G see f(u) ~f(v) em H, logo existe uma correspondência um-a-um (injetora) entre os vizinhos de G e H. Portanto u e f(u) possuem o mesmo grau.

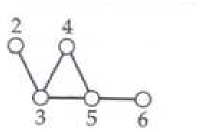
c) Dê um exemplo de dois grafos com o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas, que não sejam isomorfos.



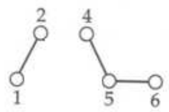
5. Seja G o grafo da figura. Trace ilustrações dos seguintes subgrafos:



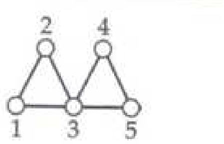
a) G - l.



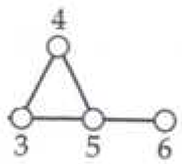
b) G - 3.



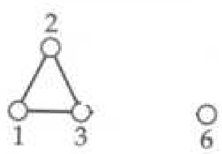
c) G – 6



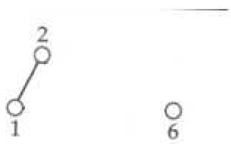
d) G-{1,2}



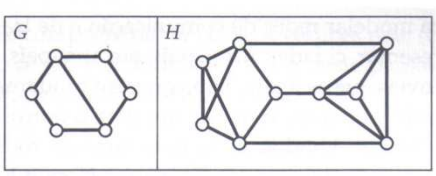
e) G-{4,5}



f) G-{3,4,5}



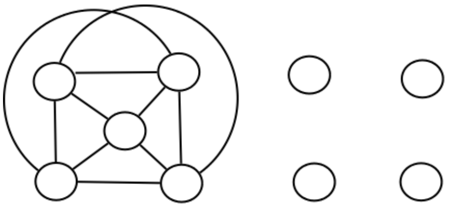
6. *Sejam* G e H os dois grafos da figura a seguir. Calcule α (G), ω (G), α (H) e ω (H).



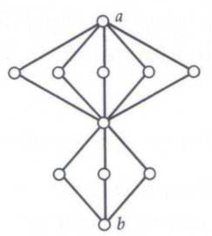
α → número de independência
ω → número de clique

α (G): 3 ω (G): 2
α (H): 3 ω (H):4

7. Ache um grafo G com α (G) = ω (G) = 5.



8. Seja G o grafo da figura a seguir.

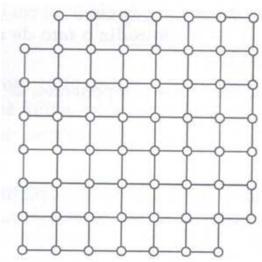


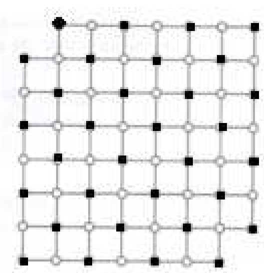
a) Quantos caminhos diferentes há de *a* a *b*
5 *3 = 15
b) Quantos passeios diferentes há de *a* a *b*
Infinitos

9. A concatenação é uma operação comutativa?
Não, pois w+w' pode ser definido e w'+w não. Por exemplo: w = 4~5~6 e w' = 6~7~8, fazendo a concatenação w+w' = 4~5~6~7~8, porém w'+w não é possível afinal 8 ≠ 4. E ainda se eles forem podem não ser iguais.

10. Prove que K_n *é* conexo.
K_n → Grafo simples e completo com n vértices.
Afinal se K_n é um grafo completo temos que ∀u, v em V, u ~ v, ou seja, todos os vértices são adjacentes entre si. Já que todos os vértices são adjacentes, logo existe um caminho "entre cada par" de vértices. Portanto, K_n *é* conexo.

11. Seja G um grafo. Um caminho *P* em G que contenha todos os vértices de G é chamado *caminho hamiltoniano.* Prove que o grafo a seguir não tem qualquer caminho hamiltoniano.

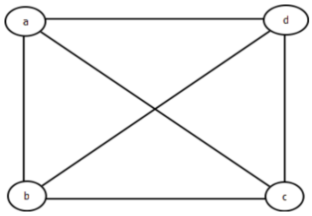




O caminho Hamiltoniano permite passar por todos os vértices de um grafo G uma única vez. Suponha que grafo tenha um caminho Hamiltoniano P. Se colorirmos os vértices de P nas cores preto e branco devemos encontrar uma seqüência de vértices em que as cores se alternam. Temos 30 nós brancos e 32 nós pretos tendo assim uma contradição, pois será impossível encontrar tal seqüência. (para que a seqüência exista só pode existir um nó preto a mais que branco). Logo o grafo não possui um caminho Hamiltoniano.

12. Considere a relação *é-ligado-a* nos vértices de um grafo. Mostre que *é-ligado-a* não precisa ser não-reflexiva nem anti-simétrica.

Considere o grafo:



- **Não- reflexiva: Não, pois um vértice ‘a’ está ligado ao vértice ‘a’.**
- **Anti-simétrica: Não, pois a ‘é ligado a’ à d, d ‘é ligado a’ a, mas a≠d**

13. Dado G(V, E) um grafo. Verifique todas as propriedades da relação “é-ligado-a” em V.

- **<u>Reflexiva:</u> Sim, pois todo x em V, x R x , já que x está ligado a x, pois existe um caminho de tamanho zero de x para x.**
- **<u>Anti-reflexiva:</u> Não, pois é reflexiva.**
- **<u>Simétrica:</u> Sim, sejam x,y vértices de V. Se xRy, por definição temos que x está ligado a y. Assim, existe um caminho de x para y em G. Logo é possível determinar o caminho inverso de y para x. Assim y está ligado a x. Portanto yRx.**
- **<u>Anti-</u>simétrica: Não. Considere o exemplo apresentado no exercício anterior.**
- **<u>Transitiva:</u> Sim. Vamos considerar que x seja ligado a y e y seja ligado a z. Queremos provar que x está ligado a z. Se x é ligado a y, então temos um caminho (x,y) iremos chamá-lo de C, da mesma maneira y e z também formam um caminho (y,z) iremos chamá-lo de P. Podemos observar que o último vértice do caminho C é o y e o primeiro vértice de P também é y, logo podemos formar a concatenação C+P, que é um passeio, como a existência de um passeio implica na existência de um caminho temos que C+P é um caminho. Portanto se xRy e yRz então xRz**

14. Considere os pares de grafos dados em cada uma das figuras a seguir. Prove ou refute que são grafos isomorfos.

Quando eles não são isomorfos:

- **Um grafo ter mais vértices do que outro**
- **Um grafo ter mais arestas do que outro**
- **Um grafo ter arestas paralelas e o outro não**

- **Um grafo ter laço e o outro não**
- **Um grafo ter um vértice de grau *k* e o outro não**
- **Um grafo ser conexo e o outro não**
- **Um grafo ter um ciclo e o outro não.**

Se houver alguma dessas características é possível mostrar que não são isomorfos. No entanto, se não houver nenhuma dessas características não podemos afirmar que são isomorfos. Para construir a prova do isomorfismo devemos apresentar uma função bijetora.

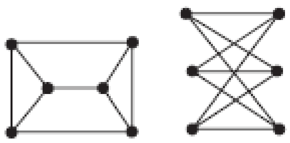


Figura 1.11:

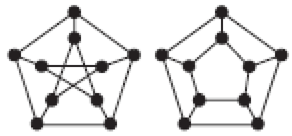


Figura 1.12:

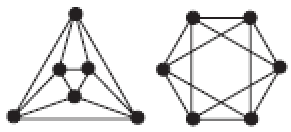


Figura 1.9:

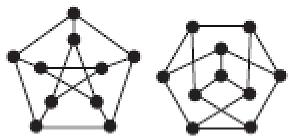


Figura 1.10:

<u>Figura 1.11 :</u> Considere G o grafo da esquerda e H o da direita. Se estes grafos forem isomorfos, deve existir uma função bijetora *f* : *V(G)* —> *V(H)* tal que, para todo *a, b* ∈ *V(G)* tenhamos *a* ~ *b* (em G) se e somente *se f (a)* ~ *f (b)* (em H).

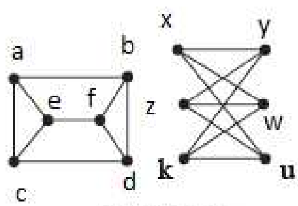


Figura 1.11:

Suponha por contradição que estes grafos são isomorfos. Vamos tentar construir tal função: Escolha por exemplo o vértice a em G. Todos os vértices em H têm a mesma forma, portanto, podemos escolher qualquer um deles para estar associado ao vértice a. Considere f(a)=x. Assim as adjacências de a em G são; a~b; a~e; a~c e as adjacências de f(a)=x em H são: x~y; x~w; x~u. Observe que em G dois vértices adjacentes ao vértice a são adjacente entre si: e~c. No entanto em H nenhum dos vértices

adjacentes a f(a) são adjacentes entre si. O que contradiz a existência de uma função f bijetora. Portanto, G e H não são isomorfos.

<u>Figura 1.12 :</u> Considere G o grafo da esquerda e H o da direita. Estes grafos não são isomorfos. Note que em H há vários ciclos de tamanho 4, como por exemplo o ciclo 1~9~8~5~1 . Em G não há nenhum ciclo de tamanho 4. Esta é uma característica que mostra não ser possível encontrar a função bijetora.

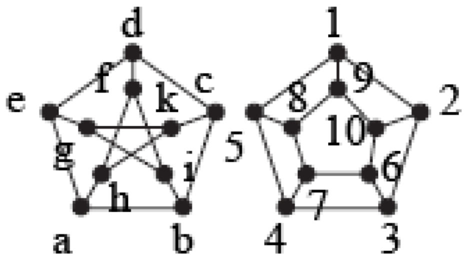


Figura 1.12:

<u>Figura 1.9 :</u> Considere G o grafo da esquerda e H o da direita. Estes grafos são isomorfos, pois existe *f* : *V(G)* —> *V(H)* tal que, para todo *a*, *b* ∈ *V(G)* tenhamos *a* ~ *b* (em G) se e somente *se f (a)* ~ *f (b)* (em H).

f : *V(G)* —> *V(H*

a---------x
b---------u
c----------v
e----------k
f----------y
d----------z

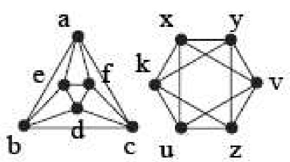


Figura 1.9:

<u>Figura 1.10 :</u> Considere G o grafo da esquerda e H o da direita. Estes grafos são isomorfos, pois é possível encontrar uma função bijetora
f : *V(G)* —> *V(H)* tal que, para todo *a*, *b* ∈ *V(G)* tenhamos *a* ~ *b* (em G) se e somente *se f (a)* ~ *f (b)* (em H).

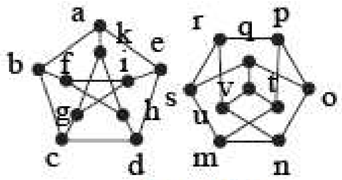


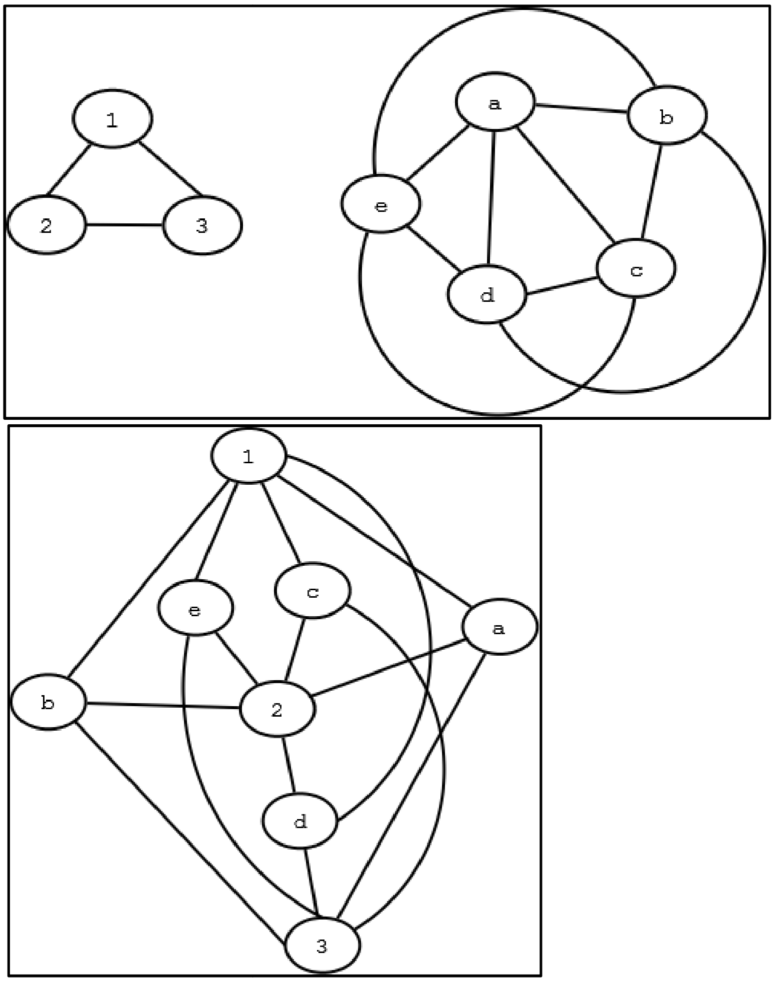
Figura 1.10:

Considere G o grafo da esquerda e H o da direita. Estes grafos são isomorfos, pois existe $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ tal que, para todo $a, b \in V(G)$ tenhamos $a \sim b$ (em G) se e somente *se* $f(a) \sim f(b)$ (em H).

$f : V(G) \longrightarrow V(H$

a---------q
b---------s
c---------r
d---------p
e---------o
f---------m
g---------u
h----------t
i-----------n

14) Qual o grafo complementar do grafo desconexo formado por duas componentes conexas isomorfas a K_3 e K_5?



K_3 **k_4**

16) Desenhe uma representação do grafo cuja matriz de adjacência é:

0 1 0 1 1
1 0 1 1 0
0 1 0 1 0
1 1 1 0 1
1 0 0 1 0

Apresente também sua representação usando lista encadeada

1 → 2 → 4 → 5 → NULL

2 → 1 → 3 → 4 → NULL

3 → 2 → 4 → NULL

4 → 1 → 2 → 3 → 5 → NULL

5 → 1 → 4 → NULL