UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – UFRPE

Matemática Discreta – Bacharelado em Sistemas de Informação
Resolução - 4ª Lista de Exercícios

<u>Indução e Recursão</u>

1) Prove utilizando o princípio da indução matemática, que são verdadeiras as seguintes igualdades:

   a) $1+4+7+...+(3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$

   i. <u>Base da Indução (n=1)</u>

   Para n = 1 temos que: $3.1 - 2 = \frac{1(3.1-1)}{2}$

   $1 = 1$

   Logo, a base da indução é verdadeira.

   ii. <u>Hipótese da indução (n = k)</u>

   Supondo que a igualdade n=k seja verdadeira, temos:

   $1+4+7+...+(3k-2) = \frac{k(3k-1)}{2}$

   iii. <u>Passo indutivo (n = k+1)</u>

   Queremos provar que:

   $1+4+7+...+(3(k+1)-2) = \frac{k+1(3(k+1)-1)}{2}$

   Prova:

$1+4+7+...+(3(k+1)-2)=$ $\underbrace{1+4+7+...+(3k-2)}+(3(k+1)-2)=$ $\frac{k(3k-1)}{2} + (3k+1) =$ $\frac{(3k^2 - k + 6k+2)}{2} = (*)$ $= \frac{k+1(3(k+1)-1)}{2}$	$\frac{k+1(3(k+1)-1)}{2} =$ $\frac{k+1(3k+2)}{2} =$ $\frac{3k^2+5k+2}{2}$ $(*)$

   Logo o passo indutivo é verdadeiro. Portanto a igualdade também é verdadeira.

   b) $9+9x10+9x100+...+9x10^{n-1} = 10^n - 1$

   i. <u>Base da Indução (n=1)</u>

   Para n = 1 temos que: $9.10^{1-1}=10^1-1$

   $9 = 9$

   Portanto, o caso básico é verdadeiro.

   ii. <u>Hipótese da indução (n=k)</u>

   Supondo que a igualdade n=k seja verdadeira, temos:

   $9+9x10+9x100+...+9x10^{k-1} = 10^k - 1$

iii. <u>Passo indutivo (n = k+1)</u>
Provemos que a igualdade é verdadeira para n= k + 1, ou seja:
$9+9x10+9x100+...+9x10^{(k+1)-1}= 10^{k+1} – 1$
Prova:
$9+9x10+9x100+...+9x10^k =$
$\underbrace{9+9x10+9x100+...+9x10^{k-1}} + 9 x10^k =$

$(10^k– 1)+ 9x10^k =$
$10.10^k – 1=10^{k+1} – 1$
Logo o passo indutivo é verdadeiro. Portanto a igualdade é verdadeira.

c) $2+6+10+...+(4n-2) = 2n^2$

i. <u>Base da Indução (n=1)</u>
Para n = 1, teremos:
$(4.1 – 2) = 2.1^2$
$2 = 2$
Logo, o caso básico é verdadeiro.

ii. <u>Hipótese da indução (n = k)</u>
Supondo que a igualdade n = k seja verdadeira, temos:
$2+6+10+...+(4k-2) = 2k^2$

iii. <u>Passo indutivo (n = k+1)</u>
Provemos que n = k+1 é verdadeira, assim teremos:
$2+6+10+...+(4(k+1)-2) = 2(k+1)^2$

Prova:
$2+6+10+...+(4k+2) =$
$2+6+10+...+(4(k-1)+2) +(4k+2) =$
$\underbrace{2+6+10+...+(4k-2)} +(4k+2) =$

$2k^2 + (4k+2) = 2(k^2+2k+1) = 2(k+1)^2$

Logo o passo indutivo é verdadeiro. Portanto a igualdade é verdadeira para todo inteiro positivo.

d) $4+10+16+...+(6n-2) = n(3n+1), n \geq 1$

i. <u>Base da Indução (n=1)</u>
Para n = 1, teremos:
$6.1 -2 = 1(3.1 + 1)$
$4 = 4$
Logo, o caso básico é verdadeiro.

ii. **<u>Hipótese da indução (n = k)</u>**
Supondo que a igualdade n = k seja verdadeira, temos:
4+10+16+...+(6k-2) = k(3k+1)

iii. **<u>Passo indutivo (n = k+1)</u>**
Provemos que n = k+1 é verdadeira, assim teremos:
4+10+16+...+(6(k+1)-2) = k+1(3(k+1)+1)

Prova:
4+10+16+...+(6k+4) =
4+10+16+...+(6(k-1)+4) +(6k+4) =
4+10+16+...+(6k-2) +(6k+4) =
k(3k+1) +(6k+4) = k+1(3k+4)
$3k^2$+k+6k+4 = (*)
k+1(3(k+1)+1) =

k+1(3(k+1)+1) =
k+1(3k+4) =
$3k^2$+4k+3k+4
(*)

Logo o passo indutivo é verdadeiro.
Portanto a igualdade é verdadeira para todo inteiro positivo.

e) $1^2 + 3^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

i. **<u>Base da Indução (n=1)</u>**
Para n = 1 temos que:
$$(2.1-1)^2 = \frac{1(2.1-1)(2.1+1)}{3}$$
$$1 = 1$$
Logo, a base da indução é verdadeira.

ii. **<u>Hipótese da indução (n = k)</u>**
Supondo que a igualdade n = k seja verdadeira, temos:
$$1^2 + 3^2 + ... + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

iii. **<u>Passo indutivo (n = k+1)</u>**
Provemos que n = k+1 é verdadeira, assim teremos:
$$1^2 + 3^2 + ... + (2(k+1)-1)^2 = \frac{(k+1)(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}{3}$$

Prova:
$$1^2 + 3^2 + ... + (2k+1)^2 =$$
$$1^2 + 3^2 + ... + (2(k-1)+1)^2 + (2k+1)^2 =$$
$$\underbrace{1^2 + 3^2 + ... + (2k-1)^2}_{} + (2k+1)^2 =$$
$$\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 =$$

$$\frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3} =$$
$$\frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3} =$$
$((2k+1)(2k^2+3k+2k+3))/3$ =
$((2k+1)(2k^2+5k+3))/3$
(*)

$\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$+ 3(2k+1)^2/3=

((2k+1)(3(2k+1)+(k(2k-1)))/3 =

((2k+1)(6k+3+2k^2-k))/3 =

((2k+1)(2k^2+5k+3))/3 = (*)

$$\frac{(k+1)(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}{3}$$

Logo o passo indutivo é verdadeiro. Portanto a igualdade também é verdadeira.

f) 1+a+a^2+...+a^{n-1} = $\frac{a^n-1}{a-1}$, para a ≠ 0, a ≠ 1, n é um inteiro positivo.

i. <u>Base da Indução (n=1)</u>
Para n = 1 temos que:

$a^{n-1} = \frac{a^n-1}{a-1}$

$a^{1-1} = \frac{a^1-1}{a-1}$

$a^0 = \frac{a\ \ -1}{a-1}$

1 = 1

Logo, a base da indução é verdadeira.

ii. <u>Hipótese da indução (n = k)</u>
Supondo que a igualdade n = k seja verdadeira, temos:

$1+a+a^2+...+a^{k-1} = \frac{a^k-1}{a-1}$

iii. <u>Passo indutivo (n = k+1)</u>
Provemos que n = k+1 é verdadeira, assim teremos:

$1+a+a^2+...+a^{(k+1)-1} = \frac{a^{k+1}-1}{a-1}$

$1+a+a^2+...+a^k =$

$\underbrace{1+a+a^2+...+a^{(k-1)}}$ $+a^k =$

$\frac{a^k-1}{a-1}+ a^k =$

$\frac{a^k\ -1+(a-1)a^k}{a-1}=$

$\frac{a^k\ -1+a^{k+1}\ -a^k}{a-1}= \frac{a^{k+1}-1}{a-1}$

Logo o passo indutivo é verdadeiro. Portanto a igualdade também é verdadeira.

g) $n^2>n+1$ para $n\geq 2$

i. <u>Base da Indução (n=2)</u>
Para P(2) temos que:

$2^2>2+1$

$4>3$

Logo, a base da indução é verdadeira.

ii. <u>Hipótese da indução (n = k)</u>
Supondo que a igualdade P(k) seja verdadeira, temos:

$k^2>k+1$

iii. <u>Passo indutivo (n = k+1)</u>
Provemos que P(k+1) é verdadeiro:

$(k+1)^2>(k+1)+1$

Prova: Pela hipótese, $k^2>k+1$. Adicionando (2k+1)

$k^2+2k+1 >k+1+(2k+1) =3k+2 > k+2$

Logo o passo indutivo é verdadeiro. Portanto P(n) também é verdadeira.

h) $10^n+3.4^{n+2}+5$ é divisível por 9, n é um inteiro positivo

i. <u>Base da Indução (n=1)</u>
Para P(1) temos que:

$9|10^1+3.4^{1+2}+5$

$9|10+3.64+5$

$9|207$

$207 = 9.k, k \in Z$

$k = 23$

Logo, a base da indução é verdadeira.

ii. <u>Hipótese da indução (n = k)</u>
Supondo que a igualdade P(k) seja verdadeira, temos:

$9|10^k+3.4^{k+2}+5$

$10^k+3.4^{k+2}+5 = 9.x$

$10^k = 9.x-3.4^{k+2}-5$

iii. <u>Passo indutivo (n = k+1)</u>
Provemos que P(k+1) é verdadeira, ou seja, que a sentença abaixo esteja verdadeira:

$9|10^{k+1}+3.4^{(k+1)+2}+5$
$10^{k+1}+3.4^{k+3}+5 = 9.x_1,\ x_1 \in Z$

Prova:
$10^{k+1}+3.4^{k+3}+5 = 10.\ 10^{k}+3.4^{k+3}+5 =$ (H.I)
$10.(9.x\ \ -3.4^{k+2}-5)\ +3.4.4^{k+2}+5 = 90x - 30.\ 4^{k+2}-50+12.\ 4^{k+2}+5$
$= 90x - 18.\ 4^{k+2}-45 = 9(10x - 2.\ 4^{k+2}-5)$, onde $10x - 2.\ 4^{k+2}-5$ é um inteiro, pois $x \in Z$ e k é um número inteiro positivo.

Logo o P(k+1) é verdadeiro. Portanto P(n) também é verdadeira.

i) $n^2 + n$ é par, $\forall\ n \geq 1$

$n^2 + n = 2x,\ x \in Z$

i. <u>Base da Indução (n=1)</u>
Para P(1) temos que:
$2|1^2 + 1$
$2|2$
Logo, a base da indução é verdadeira.

ii. <u>Hipótese da indução (n = k)</u>
Supondo que a igualdade P(k) seja verdadeira, temos:
$k^2 + k = 2x,\ x \in Z$

iii. <u>Passo indutivo (n = k+1)</u>
Provemos que P(k+1) é verdadeira, ou seja:
$(k+1)^2+ k +1= 2x_2,\ x_2 \in Z$

Prova:
$(k+1)^{2} + k+1 = k^2+ 2k + 1 + k + 1 = k^2+ k + 2k + 2$
$= 2x + 2k + 2 = 2(x + k +1) = 2.x_3\ ,\ x_3 \in Z$

Logo o P(k+1) é verdadeiro. Portanto P(n) também é verdadeira.

j) $1 + 8 + ... + n^3 = (n(n + 1)/2)^2,\ \forall\ n \geq 1$

i. <u>Base da Indução (n=1)</u>
Para n = 1 temos que:
$1^3 = (1(1 + 1)/2)^2$
$1^3= 1^2$

Logo, a base da indução é verdadeira.

ii. <u>Hipótese da indução (n = k)</u>
Supondo que a igualdade P(k) seja verdadeira, temos:
$1 + 8 + ... + k^3 = (k(k + 1)/2)^2$

iii. <u>Passo indutivo (n = k+1)</u>

Queremos provar que P(k+1) é verdadeiro, ou seja:

$$1 + 8 + \ldots + (k+1)^3 = (k+1((k+1)+ 1)/2)^2$$

Prova:

$$\underbrace{1 + 8 + \ldots + k^3}_{\text{Hipótese da indução}} + (k+1)^3$$

$$(k(k + 1)/2)^2 + (k+1)^3 =$$
$$(k^2(k+1)^2)/4 + (k+1)\,(k+1)^2 =$$
$$[(k^2(k+1)^2) + 4(k+1)(k+1)^2]/4 =$$
$$[(k+1)^2(k^2 + 4(k+1)]/4 =$$
$$[(k+1)^2(k^2 + 4k+4)]/4 =$$
$$[(k+1)^2(k+2)^2]/4 = (k+1((k+1)+ 1)/2)^2$$

Logo P(k+1) é verdadeiro. Portanto, P(n) é verdadeiro para ∀ n ≥1.

k) (1- ½).(1 – 1/3).(1- ¼)...(1 – 1/(n+1)) = 1/(n+1), ∀ n ≥1

<u>i. Base da Indução (n=1)</u>

Para n = 1 temos que:

$$(1 - 1/(1+1)) = 1/(1+1)$$
$$½ = ½$$

Logo, a base da indução é verdadeira.

<u>ii. Hipótese da indução (n = k)</u>

Supondo que a igualdade n = k seja verdadeira, temos:

$$(1- ½).(1 - 1/3).(1- ¼)\ldots(1 - 1/(k+1)) = 1/(k+1)$$

<u>iii. Passo indutivo (n = k+1)</u>

Devemos provar que a igualdade abaixo é verdadeira:

$$(1- ½).(1 - 1/3).(1- ¼)\ldots(1 - 1/((k+1)+1)) = 1/((k+1)+1)$$
$$(1- ½).(1 - 1/3).(1- ¼)\ldots(1 - 1/(k+2)) = 1/(k+2)$$

Prova:

$$(1- ½).(1 - 1/3).(1- ¼)\ldots(1 - 1/(k+2)) =$$
$$\underbrace{(1- ½).(1 - 1/3).(1- ¼)\ldots(1 - 1/(k+1))}_{[1/(k+1)]}.(1 - 1/(k+2)) =$$
$$[1/(k+1)].(1 - 1/(k+2)) =$$
$$\frac{1}{k+1}\frac{(k+2)-1}{k+2} =$$
$$\frac{1}{k+1}\frac{(k+1)}{k+2} = 1/(k+2)$$

Logo o passo indutivo é verdadeiro. Portanto a igualdade também é verdadeira.

l) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$, n é um inteiro positivo

i. <u>Base da Indução (n=1)</u>
Para P(1) temos que:

$$\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{1+1}$$
$$½ = ½$$

Logo, P(1) é verdadeira.

ii. <u>Hipótese da indução (n = k)</u>
Supondo que P(k) seja verdadeira, temos:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

iii. <u>Passo indutivo (n = k+1)</u>
Queremos provar que P(k+1) é verdadeiro, ou seja:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{(k+1)((k+1)+1)}=\frac{k+1}{(k+1)+1}$$
$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

Prova:

$$\underbrace{\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}}_{\textbf{Hipótese da indução}}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$\frac{[(k+2)k]+1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$\frac{1+2k+k^2}{(k+1)(k+2)}=$$

$$\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

Logo P(k+1) é verdadeiro. Portanto P(n) também é verdadeira.

m) 1.1!+2.2!+3.3!+...+n.n! = (n+1)! -1 , onde n! é o produto dos inteiros positivos de 1 a n. E n é um número inteiro positivo.

i. <u>Base da Indução (n=1)</u>
Para n = 1 temos que:

$$1.1! = (1+1)! - 1$$
$$1 = 1$$

Logo, a base da indução é verdadeira.

ii. <u>Hipótese da indução (n = k)</u>
Supondo que a igualdade n = k seja verdadeira, temos:

$$1.1!+2.2!+3.3!+...+k.k! = (k+1)! - 1$$

iii. <u>Passo indutivo (n = k+1)</u>
Provemos que P(k+1) é verdadeiro, ou seja:

$$1.1!+2.2!+3.3!+...+(k+1).(k+1)! = ((k+1)+1)! - 1$$

Prova:

$$1.1!+2.2!+3.3!+...+(k+1).(k+1)! =$$
$$\underbrace{1.1!+2.2!+3.3!+...+k.k!}_{(k+1)! - 1}+(k+1).(k+1)! =$$
$$(k+1)! - 1 +(k+1).(k+1)! =$$
$$(k+1)![\, k+1 +1] -1 =$$
$$(k+1)!(k +2) -1 = (k+2).(k+1)! - 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} ((k+1)+1)! - 1 = \\ (k + 2)! -1 = \\ (k+2).(k+1)!-1 \end{array}}$$

Logo o passo indutivo é verdadeiro. Portanto a igualdade também é verdadeira.

2) Suponha que Joana casou-se e teve três filhos. Vamos chamar estes filhos de geração 1. Suponha agora que cada um destes filhos tenha três filhos; então, a geração 2 contém nove descendentes. Isso continua de geração em geração. Escreva a relação de recorrência para a n-ésima geração.

GERAÇÃO	DESCENDENTES
1	3
2	3G(1) = 3.3 = 9
3	3G(2) = 3.9 = 27
n	3G(n-1)

RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA

$$\begin{cases} G(1) = 3 \\ G(n) = 3.G(n-1),\ \forall\ n \geq 2 \end{cases}$$

3) A função n! , pode ser definida recursivamente. Qual é a relação de recorrência para esta função?

F(0) = 0! = 1
F(1) = 1! = 1
F(2) = 2! = 1.2 = 2
F(3) = 3.F(2)!= 3 .2 = 6

⇨

RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA

F(0) = 0! = 1
F(n) = n.F(n-1) , ∀ n ≥ 1

4) Certo banco está cobrando 2% de juros ao mês. João tomou emprestado R$ 2000,00 e deve pagar prestações mensais fixas de R$200,00. A primeira prestação será paga ao final do primeiro mês de empréstimo. Encontre a relação de recorrência para a dívida de Tadeu ao final do n-ésimo mês.

F(0) = 2000
F(1) = 2000*1,02 – 200
F(2) = F(1)*1,02 - 200

⇨

RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA

F(0) = 2000
F(n) = 1,02*[F(n-1)] – 200 , ∀ n ≥ 1

5) Encontre os cinco primeiros valores das sequências abaixo:

a) S(1) = 10
S(n) = S(n-1) +10, para n>1
S(1) = 10
S(2) = 10 +10 = 20
S(3) = 20 +10 = 30
S(4) = 30 +10 = 40
S(5) = 40 +10 = 50

b) S(1) = 1
S(n) = S(n-1) + 1/n , para n>1
S(1) = 1
S(2) = 1 + ½ = 3/2
S(3) = 3/2 + 1/3 = 11/6
S(4) = 11/6 + ¼ = 25/12
S(5) = 25/12 + 1/5 = 137/60

c) B(1) = 1
B(n) = B(n-1) + n^2 , para n ≥ 2
B(1) = 1
B(2) = 1 + 2^2 = 5
B(3) = 5 +3^2= 45
B(4) = 45 + 4^2= 61
B(5) = 61 + 5^2 = 86

d) B(1) = 1; B(2) = 2; B(3) = 3
B(n) = B(n - 1) + 2B(n - 2) + 3B(n - 3), para n > 3
B(1) = 1
B(2) = 2
B(3) = 3

B(4) =B(3) + 2B(2) + 3B(1) = 3 +2.2+3.1 = 10
B(5) =B(4) + 2B(3) + 3B(2) = 10 + 2.3+3.2 = 22

6) Seja $b_0 = 1$ e, para n > 0, seja $b_n= 3.b_{n-1} – 1$. Com esses dados responda as seguintes perguntas:
   a) Quais os três primeiros termos?
      $b_0 = 1$
      $b_1 = 3.1 – 1 = 2$
      $b_2 = 3.2 -1 = 5$

   b) Prove: $b_n= (3^n+1)/2$

      i. <u>Base da Indução (n=0)</u>
      Para n = 1 temos que:
      $b_0= (3^0+1)/2$
      $b_0= 2/2=1.$
      Logo, a base da indução é verdadeira, pois pela def. b_0=1.

      ii. <u>Hipótese da indução (n = k)</u>
      Supondo que a igualdade n = k seja verdadeira, temos:
      $b_k= (3^k+1)/2$

      iii. <u>Passo indutivo (n = k+1)</u>
      Provemos que P(k+1) é verdadeiro, ou seja:
      $b_{k+1} = (3^{k+1}+1)/2$

      Prova:
      Partindo da relação de recorrência $b_n= 3.b_{n-1} – 1$ para n= k+1 temos que:
      $b_{k+1}= 3.b_{k+1-1} – 1$
      $b_{k+1}= 3.b_k – 1$

      Da hipótese temos que $b_k= (3^k+1)/2$, logo:
      $b_{k+1} = 3[(3^k+1)/2] -1=$
      $= (3. 3^k+3-2)/2$
      $= (3^{k+1}+1)/2$
      Logo o passo indutivo é verdadeiro. Portanto a sequência também é verdadeira.

7) Seja a_0=3 e, para n>0, $a_n= a_{n-1} +n$. Usando essa sequência responda as seguintes perguntas:
   a) Quais são os três próximos termos da sequência?
      $a_1=a_0 + 1 = 4$
      $a_2 = a_1 +2 = 4 + 2 = 6$
      $a_3 = a_2 +3 = 6 + 3 = 9$

b) Prove que $a_n = \dfrac{n^2 + n + 6}{2}$

i. <u>Base da Indução (n=0)</u>
Para n = 1 temos que:

$a_0 = (0^2 + 0 + 6)/2 = 3$

Logo, o caso básico é verdadeiro.

ii. <u>Hipótese da indução (n = k)</u>
Supondo que a igualdade n = k seja verdadeira, temos:
$a_k = (k^2 + k + 6)/2$

iii. <u>Passo indutivo (n = k+1)</u>
Provemos que P(k+1) é verdadeiro, ou seja:
$a_{k+1} = [(k+1)^2 + k+1 + 6]/2$
$a_{k+1} = [k^2 + 2k+1+k+7]/2$
$a_{k+1} = [k^2 + 3k+8]/2$

Prova:

Partindo da relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + n$ para n= k+1 temos que:
$a_{k+1} = a_k + k+1$

Da hipótese temos que $a_k = (k^2 + k + 6)/2$, logo:
$a_{k+1} = a_k + k+1$
$=(k^2 + k + 6)/2 + k+1 =$
$=(k^2 + k + 6 + 2k + 2) =$
$=(k^2 + 3k + 8) = [(k+1)^2 + k+1 + 6]/2$

Logo o passo indutivo é verdadeiro. Portanto a sequência também é verdadeira.