Resolução

1) Quais desses subconjuntos são iguais?
A={x | (∃y, y ϵ {0,1,2}) e x = y^2} , B={x | (∃y, y ϵ {0,-1,-2}) e x = y^2} e C={x |(∃y, y ϵ {-1,0,2,0}) e x = y^2}
Todos são iguais.

2) Escreva os elementos dos seguintes conjuntos:
   a) A = {x | x ϵ N, x ≤10 e 3|x}
   A = {x | x ϵ N, x ≤10 e x = 3.k, k ϵ Z}
   A = {0,3,6,9}
   b) B = {x | x ϵ Z, x^2 = 4}
   B = {2,-2}
   c) C = {x | x ϵ Z, x é primo e 2 | x}
   C = {2
   d) D = {x | x ϵ N, x≤10 e (∀y)(y é par → x ≠ y)}
   D = {1,3,5,7,9}

3) Sejam A = {a, {a}, {{a}}}; B = {a}; C = {∅,{a,{a}}} e ∅ .Quais das afirmações são verdadeiras?
   a) B ⊆ A **(v), pois a ∈ A**
   b) ∅ ⊆ C **(v), pois o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto**
   c) {a,{a}} ⊆ A **(v), pois tanto o elemento a como o {a} pertencem a A**
   d) C ∈ A **(f), pois por exemplo, ∅ ∈ C e ∅ ∉ A**
   e) {a,{a}}∈ A **(f), pois o elemento {a,{a}} não pertence a A.**
   Correto:{a,{a}} ⊆ A
   f) ∅∈ A **(f), vazio é um subconjunto de A e não um elemento de A**
   g) ∅ ∈ C **(v), pois vazio é um elemento de C**
   h) a ∈ C **(f)** , **a não é um elemento de C**
   i) {{a}} ∈ A **(v) pois o conjunto {{a}} é um elemento de A**
   j) {{a}} ⊆ A **(v), afinal {a} é um elemento de A**

4) Dado o conjunto A = {{2,4,6},{{7}},8,9,{1}}:
   a) Quais são os elementos de A? **{2,4,6} ; {{7}} ; 8 ; 9 e {1}**
   b) 1∈ A? **Não, 1 ∈ {1} que é subconjunto de A**
   c) 8∈ A? **Sim.**
   d) {{7}} ∈ A?**Sim**
   e) ∅∈ A?**Não, ∅ é subconjunto de A**
   f) {{1}} ∈ A? **Não**
   g) {{1}} ⊆A?**Sim, pois {1} é um elemento de A**
   h) ∅⊆ A?**Sim.**
   i) {8,9} ⊆ A?**Sim, pois 8 e 9 são elementos de A**

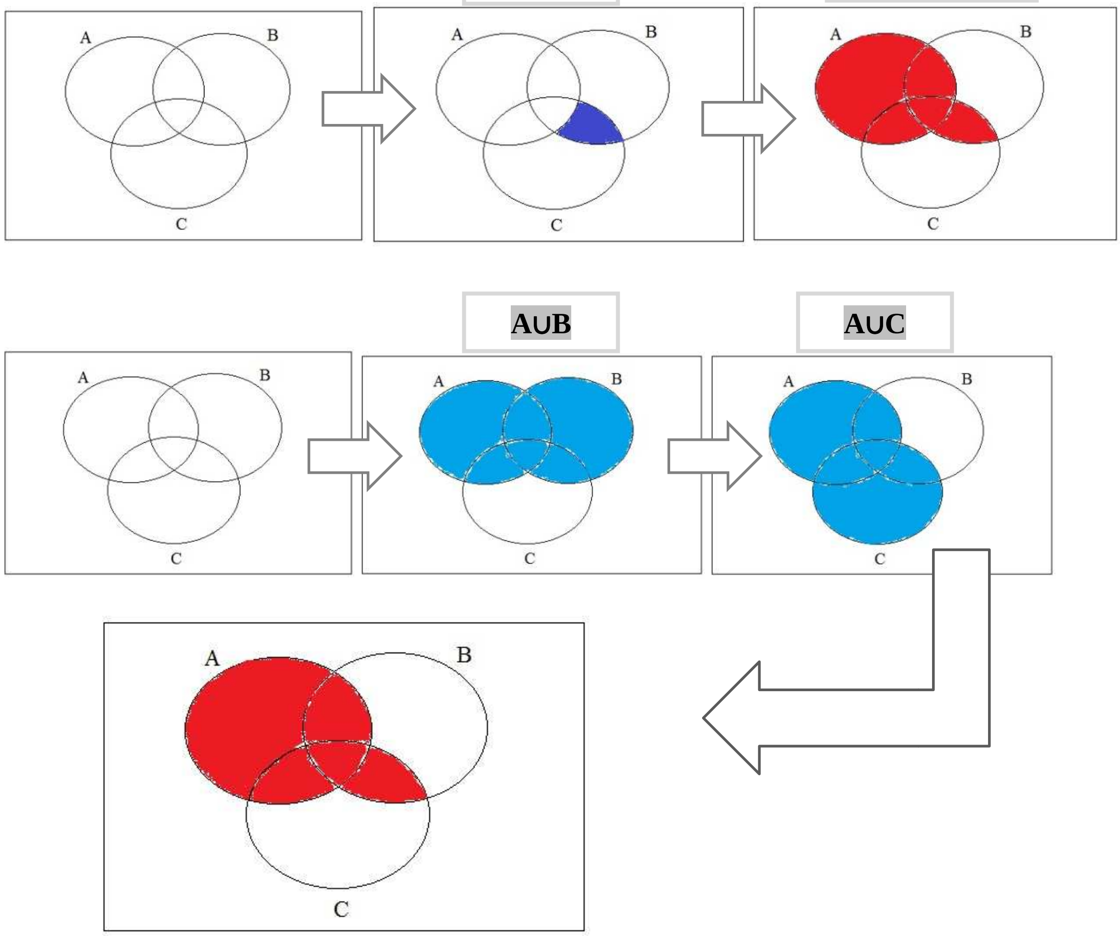
5) Dado o conjunto universo U = {1,2,...,9} e os conjuntos A = {2,4,5,6,8,} B = {1,4,5,9} C = {x:x∈ Z e x^2 = -1} D = {x|x∈ Z e 2 ≤ x < 5}. Determine:
C = ∅ ;
D = {2,3,4}

a) A ∪ B e A ∩ B **A ∪ B = {1,2,4,5,6,8,9}; A ∩ B = {4,5}**
b) C ∪D e C ∩ D **C ∪ D = D ; C ∩ D = ∅**
c) D ∪ A e D ∩ A **D ∪ A = {2,3,4,5,6,8} ; D ∩ A = {2,4}**
d) A^c **A^c = {1,3,7,9}**
e) A-D **A-D = {3,5,6,8}**
f) AΔB= {1,2,6,8,9}
g) $(A \cap B)^C$ **{1,2,3,6,7,8,9}**
h) $(D \cap B) \cup A^C$ **{1,3,4,7,9}**
i) (D ∩ C) ∪ (D ∩ B)= D ∩ (C∪B)= {4}

6) Dado os conjuntos A ={2,4,5} e $C_B A$ ={7,8}, quais são os elementos do conjunto B.
Se $C_B A$ é o que falta em A para se tornar B, logo B = {2,4,5,7,8}

7) Ilustre a lei de distributividade A ∪ (B ∩ C) = (A∪B) ∩ (A∪C) com o diagrama de Venn.

B ∩ C **A ∪ (B ∩ C)**



8) Sejam A = {x ∈ Z: x é múltiplo de 8} e B = {x ∈ Z: x é múltiplo de 2}. Prove que A ⊆ B.
∀x ∈ A, x = 8k_1 onde k_1∈ Z. Logo x = 2(4 k_1), como k_1 é inteiro, 2 k_1 também o é, assim temos que x = 2k, k ∈ Z, logo ∀x ∈ A, x é múltiplo de 2, portanto x ∈ B. Assim A ⊆ B.

9) Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Utilizando as definições, prove que:

a) $\mathbf{A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)}$

i) $A - (B \cap C) \subseteq (A - B) \cup (A - C)$

$\forall x, x \in A - (B \cap C) \Rightarrow$ (definição operação diferença)

$\Rightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cap C)$ (definição de união e interseção)

$\Rightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \Rightarrow$ (distributiva)

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \Rightarrow$ def. op. diferença

$\Rightarrow (x \in A - B) \vee (x \in A - C) \Rightarrow$ (def. união)

$\Rightarrow x \in (A - B) \cup (A - C)$

ii) $(A - B) \cup (A - C) \subseteq A - (B \cap C)$

$\forall x, x \in (A - B) \cup (A - C) \Rightarrow$ (def. união)

$\Rightarrow (x \in A - B) \vee (x \in A - C) \Rightarrow$ def. operação diferença

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \Rightarrow$ distributiva

$\Rightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \Rightarrow$ def. união e interseção

$\Rightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cap C) \Rightarrow$ def. operação diferença

$\Rightarrow x \in A - (B \cap C)$

De i) e ii) conclui-se que: $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

b) $\mathbf{(A \cup B) - (A \cap B) \subseteq A \Delta B}$

$\forall x, x \in (A \cup B) - (A \cap B) \Rightarrow$ def. diferença

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B) \Rightarrow$ união

$\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin (A \cap B) \Rightarrow$ distributiva

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin (A \cap B)) \vee (x \in B \wedge x \notin (A \cap B)) \Rightarrow$ interseção

$\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \Rightarrow$ diferença

$\Rightarrow x \in A - B) \vee (x \in B - A) \Rightarrow$ união

$\Rightarrow x \in (A - B) \cup (B - A) \Rightarrow$ diferença simétrica

$\Rightarrow x \in A \Delta B$

Portanto, $\mathbf{(A \cup B) - (A \cap B) \subseteq A \Delta B}$

c) Prove $A \subseteq B$ **se e somente se** $B' \subseteq A'$

i) $\Rightarrow$ $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

Hipótese: $A \subseteq B$ Tese: $B' \subseteq A'$

$\forall x, x \in B' \Rightarrow x \notin B$, como $A \subseteq B$ (hipótese), $x \notin A \Rightarrow x \in A'$.

Portanto $B' \subseteq A'$.

ii) $\Leftarrow B' \subseteq A' \Rightarrow A \subseteq B$

Hipótese: $B' \subseteq A'$ Tese: $A \subseteq B$

$\forall x, x \in A \Rightarrow x \notin A'$, como $B' \subseteq A'$ (hipótese), $x \notin B' \Rightarrow x \in B$.

Portanto $A \subseteq B$.

De i) e ii), conclui-se que $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$

d) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

$\forall \boldsymbol{X},, \boldsymbol{X} \in P(A) \cup P(B)$ união

$\Rightarrow X \in P(A) \vee X \in P(B) \Rightarrow$ def. conjunto das partes

$\Rightarrow X \subseteq A \vee X \subseteq B \Rightarrow$ definição união

$\Rightarrow X \subseteq A \cup B \Rightarrow$ def. conj. das partes

$\Rightarrow X \in P(A \cup B)$

Observação: utilizar letra maiúscula para representar os elementos do conjunto das partes, pois eles são subconjuntos

e) Prove A ⊆ B se e somente se A∩ B' =∅

⇒ A ⊆ B⇒ A∩ B' = ∅

Hipótese: A ⊆ B Tese: A∩ B' = ∅

Considere A ⊆ B e suponha por contradição que A ∩ B' ≠ ∅. Logo existe x, tal que x ∈ A e x∈ B´. Como A ⊆ B, se x ∈ A então x∈ B. ABSURDO! (x ∈ B ∧ x∈ B´).

⇐A∩ B' = ∅ ⇒ A ⊆ B

Considere A∩ B' = ∅ e suponha por contradição que A ⊄ B. Logo ∃x ∈ A e x ∉ B, assim x ∈ A e x ∈ B´⇒ A∩ B'≠ ∅. ABSURDO! (contradiz a hipótese).

De i) e ii), conclui-se que A ⊆ B se e somente se A∩ B' =∅

10) Prove, utilizando os teoremas da teoria de conjuntos

a. (A' ∪ B')' = A ∩ B
(A' ∪ B')' = (Lei de Morgan)
(A')' ∩ (B') ' (propriedades de complemento)
A ∩ B.

b. ([(A∩C) ∩ B]∪ [(A ∩ C) ∩ B']) ∪ (A ∩ C)' = U
([(A∩C) ∩ B]∪ [(A ∩ C) ∩ B']) ∪ (A ∩ C)'= (Propr. Distributiva)
= ([(A∩C) ∪ (B ∩ B')] ∪ (A ∩ C)' = propriedades de complemento
= ([(A∩C) ∪ ∅)] ∪ (A ∩ C)' = Elemento neutro da união
= (A∩C) ∪ (A ∩ C)' = propriedades de complemento
= (A∩C)

c. $\overline{\left[\left(\overline{A\cap\left(\overline{A}\cup\overline{\overline{B}}\right)}\right)\cap\left(\overline{\left(\overline{B}\cup A\right)\cap B}\right)\right]} = A\cap B$

$\overline{\overline{[(A\cap(\overline{A}\cup\overline{\overline{B}}))}\cap\overline{((\overline{\overline{B}}\cup A)\cap B)]}} = Morgan$

$=[\overline{\overline{A\cap(\overline{A}\cup\overline{\overline{B}})}}]\cup[\overline{\overline{(\overline{\overline{B}}\cup A)\cap B}}] = propr.Complemento$

$=[A\cap(\overline{A}\cup B)]\cup[\overline{B}\cup A)\cap B] = distributiva$

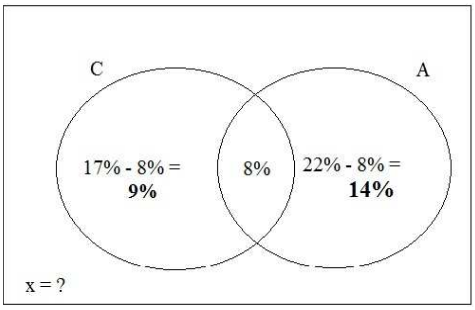
$=[(A\cap\overline{A})\cup(A\cap B)]\cup[(B\cap\overline{B})\cup(A\cap B)] = propr.Complemento$

$=[\phi\cup(A\cap B)]\cup[\phi\cup(A\cap B)] = El.neutro$

$= A\cap B$

d) [C∩(A ∪ B)] ∪ [(A∪B) ∩ C'] = A ∪ B
=[C∩(A ∪ B)] ∪ [(A∪B) ∩ C'] = *distributiva*
=[(C ∩ A) ∪ (C ∩ B)] ∪ [(C'∩ A) ∪ (C'∩ B)]= *associativa da união*
=(C ∩ A) ∪ (C' ∩ A) ∪ (C ∩ B) ∪ (C' ∩ B) = *distributiva*
=[A ∩ (C ∪C')] ∪ [B∩ (C ∪ C')]= *propr. de complemento*
=(A ∩ U) ∪ (B ∩ U) = *El. Neutro da interseção*
=A ∪ B

11) Um levantamento sócio econômico entre os habitantes de uma cidade revelou que,exatamente: 17% têm casa própria; 22% têm automóvel; 8% têm casa própria e automóvel. Qual o percentual dos que não têm casa própria nem automóvel?

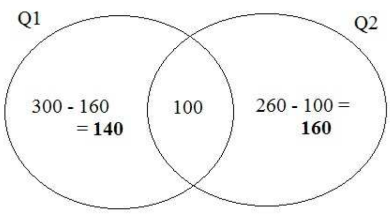


|A|=22%; C=17%; |A∩C|=8%

Calcular |A∪C|=|A|+|C|-|A∩C|=
=22%+17%-8%=31%
Total=100%
100%-|A∪C|=69%

Outra forma:
x+9%+8%+14% = 100%
x = 69%

12) Em uma prova de matemática com apenas duas questões, 300 alunos acertaram somente uma das questões e 260 acertaram a segunda. Sendo que 100 alunos acertaram as duas, e 210 alunos erraram a primeira questão. Quantos alunos fizeram a prova?



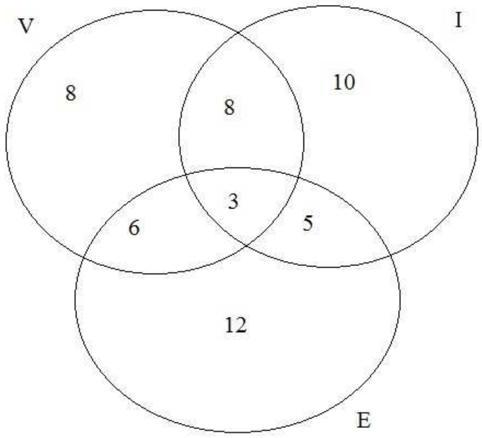
| Q2|=260; |Q1∩Q2|=100
|(Q1-Q2) ∪ (Q2-Q1)=300
|U-Q1|=210
|Q2-Q1|=|Q2|-|Q1∩Q2|=260-100=160

Calcular |Q1∪Q2|=|(Q1-Q2) ∪ (Q2-Q1)+|Q1∩Q2|=300+100=400

Sabendo que 210 alunos erraram a primeira questão e dentro deles estão incluídos tanto os que erraram as duas questões, como aqueles que acertaram apenas a segunda. Se fizermos 210 – 160 = 50, o resultado será o número de alunos que erraram a primeira e erraram a segunda.

Total de alunos que fizeram a prova foi: |Q1∪Q2|+50 = 400+50=450.

13) Em uma pesquisa com 60 pessoas, verificou-se que:
- 25 Compram o produto V; |V|=25
- 26 Compram I ; |I|=26
- 26 Compram E ; |E|=26
- 9 Compram os produtos V e E ; | V∩E|=9
- 11 Compram V e I; |V∩I|=11
- 8 Compram E e I; |E∩I|=8
- 3compram os três produtos ; |E∩I∩V|=3



a) Ache o número de pessoas que compram pelo menos um dos 03 produtos
   $|V \cup I \cup E = |V|+|I|+|E|-|V \cap I|-|V \cap E|-|E \cap I|+|E \cap I \cap V| = 52$
b) Ache o número de pessoas que compram exatamente um produto
   8 + 10 +12 = 30
c) Ache o número de pessoas que não compram nenhum dos produtos
   60 – 52 = 8

14) Determine a quantidade de elementos em P(S) e o conjunto das partes de S = {p,q,r,s}.
   $2^n = 2^4 = 16$ elementos
   {{},{p},{q},{r},{s},{p,q},{p,r},{p,s},{q,r},{q,s},{r,s},{p,q,r},{p,q,s},{q,r,s},{r,s,p},{p,q,r,s}}

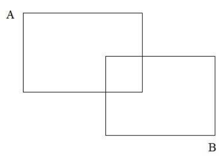
15) O que pode-se dizer sobre A se P(A) = {{},{x},{y}.{x,y}}
   A = {x,y}

16) Qual a cardinalidade dos conjuntos abaixo?

a)	A = ∅	**|A| = 0**
b)	A = {∅}	**|A| = 1**
c)	B = {∅,{∅}}	**|A| = 2**
d)	B = {∅, {∅}, { ∅, {∅}} }	**|A| = 3**

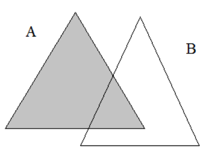
17) Assinale, nos diagramas abaixo, os conjuntos indicados.

a) $(A – B) \cap C_B A$

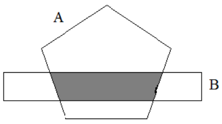


$(A – B) \cap C_B A = \emptyset$

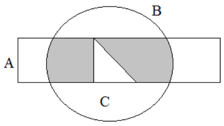
b)$(A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup (B \cap B') = A \cup \emptyset = A$



c) $A \cap (B \cup A') = (A \cap B) \cup (A \cap A') = (A \cap B) \cup \emptyset = (A \cap B)$



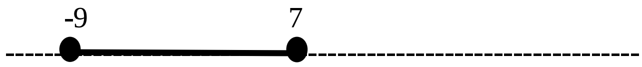
d) $C_{A \cap B}\, C = (A \cap B) \cap C'$



18) Considere os seguintes conjuntos:

$A = \{x \in \Re \mid -8 \leq x \leq 8\}$

$B = \{x \in \Re \mid -9 \leq x \leq 7\}$



$C = \{x \in \Re \mid -2 \leq x \leq 10\}$

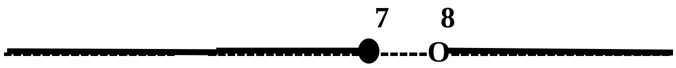
$D = \{x \in \Re \mid 9 \leq x \leq 15\}$

Represente, graficamente, os seguintes conjuntos e produtos cartesianos:

a) $G = A \cap (B \cup A')$

A' :

(B ∪ A') :



A ∩ (B ∪ A') = A∩B

G = {x ∈ℜ | -8 ≤ x ≤ 7}

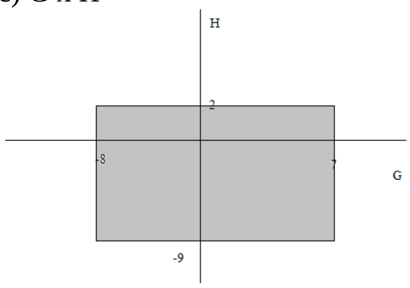
b) $H = (A \cup B) \cap \overline{C}$

(A∪B) = {x ∈ℜ | -9 ≤ x ≤ 8}

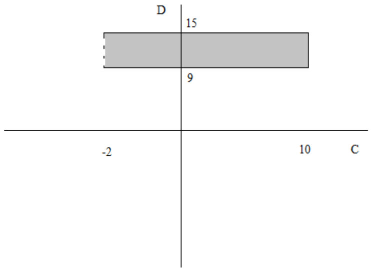
$\overline{C}$ = {x ∈ℜ | -2 < x ∧ x > 10}

H = (A∪B) ∩ $\overline{C}$ = {x ∈ℜ|-9≤ x < 2}

c) G x H



d)C x D



Obs. Em -2 a linha vertical deve ser continua.