Resolução – Lista 1

Monitoria: Bruna

1) Lógica Proposicional

a) Marque as frases que forem proposições:

- Não fume!**Não é uma proposição, pois nesta sentença o valor lógico atribuído não será claramente verdadeiro ou falso.**
- Quatro é maior que cinco. **É proposição.**
- Ela é, certamente uma mulher inteligente**. Como "Ela" não está especificada, não exprime um pensamento completo, portanto não é proposição! Se estiver claro quem é "Ela", será proposição!**
- X-2=3 (No conjunto dos inteiros) **É proposição, considerando que o valor de x é dado.**

b) Numa fábrica temos três funcionários que afirmam o seguinte:
Adalberto: "Se Cleber não foi ao trabalho, então José também não foi."
Cleber: " Adalberto não foi ao trabalho mas José foi."
José: "Eu fui ao trabalho, mas Cleber ou Adalberto não foram."
Sejam as seguintes afirmações:
p: Adalberto foi ao trabalho.
q: Cleber foi ao trabalho.
r: José foi ao trabalho.
Responda as questões seguintes usando tabela-verdade:

- Se todos foram trabalhar, quem mentiu?
- Se todos disseram a verdade, quem não foi ao trabalho?
(Dica o ideal é estabelecer uma fórmula lógica dos argumentos de cada um e depois uma tabela-verdade dos mesmos)

Adalberto: "Se Cleber não foi ao trabalho, então José também não foi."

Fórmula lógica: ~q -> ~r

Explicação: O "não q" deve aparecer, pois o antecedente está negando a proposição q (Cleber foi ao trabalho), logo se segue o sinal da condicional, pois analisando a frase, temos "Se... então", isso nos remete à ideia de condição. O "não r" aparece por último, pois ocorre a negação da premissa r(José foi ao trabalho).

Tabela-verdade de Adalberto (~q -> ~r)

P	Q	R	~q	~r	~q -> ~r
V	v	V	f	f	v
V	v	F	f	v	v
V	f	V	v	f	f
V	f	F	v	v	v
F	v	V	f	f	v
F	v	F	f	v	v
F	f	V	v	f	f
F	f	F	v	v	v

Cleber: “Adalberto não foi ao trabalho, mas José foi.”

Fórmula lógica: ~p ^ r

Explicação: Primeiro deve-se utilizar o “não p”, pois a primeira premissa está negando o valor da afirmação p (“Adalberto foi ao trabalho.”). Depois deve-se utilizar o símbolo da conjunção (^), pois o advérbio “mas” (“... mas José foi”), também é uma conjunção. Por último, utiliza-se a afirmação r, simbolizando a afirmação “José foi ao trabalho.”

Tabela-verdade de Cleber (~p ^r)

P	Q	R	~p	~p ^ r
V	v	V	f	f
V	v	F	f	f
V	f	V	f	f
V	f	F	f	f
F	v	V	v	v
F	v	F	v	f
F	f	V	v	v
F	f	F	v	f

José: “Eu fui ao trabalho, mas Cleber ou Adalberto não foram.”

Fórmula lógica: r ^ (~q v ~p)

Explicação: Primeiramente coloca-se a afirmação r (“José foi ao trabalho”), logo se segue o operador de conjunção, pois há a presença do “mas” (“... mas Cleber ou Adalberto não foram.”). Há uma disjunção (v) entre as afirmações q e p (“Cleber ou Adalberto”) , sendo que as duas afirmações estão negadas(“não q” ou “não p”), pois “Cleber ou Adalberto não foram”.

Tabela-verdade de José (r ^ (~q v ~p))

P	Q	R	~p	~q	(~q v ~p)	r ^ (~q v ~p)
V	v	v	F	f	f	f
V	v	f	F	f	f	f
V	f	v	F	v	v	v
V	f	f	F	v	v	f
F	v	v	V	f	v	v
F	v	f	V	f	v	f
F	f	v	V	v	v	v
F	f	f	V	v	v	f

Tabela-verdade geral

P	Q	R	Aldalberto ~q -> ~r	Cleber ~p ^ r	José r ^ (~q v ~p)
V	v	V	v	f	f
V	v	F	v	f	f
V	f	V	f	f	v
V	f	F	v	f	f
F	v	V	v	v	v
F	v	F	v	f	f
F	f	V	f	v	v
F	f	F	v	f	f

- Se todos foram trabalhar, quem mentiu?

Se todos foram trabalhar, então primeiro deve-se analisar as afirmações p, q e r. Todas estas afirmações precisam ser verdadeiras, portanto a linha que deve ser analisada é a primeira. Para saber quem mentiu, basta estudar os valores que cada funcionário apresenta na primeira linha da tabela. Os valores que são obtidos então são Adalberto(v), Cleber(f) e José(f). Então Cleber e José mentiram.

- Se todos disseram a verdade, quem não foi ao trabalho?

Se todos disseram a verdade, então a linha que será analisada é a que apresenta todos os valores verdadeiros em Adalberto, Cleber e José. A quinta linha é a linha em que todos os valores verdadeiros se encontram, portanto, é nesta linha que se encontra a resposta a esta questão. Segundo os valores das afirmações da quinta linha, somente p está como falso, ou seja, somente Adalberto não foi ao trabalho.

c) Classifique as sentenças lógicas abaixo, como tautologia, contradição ou sentença satisfatória:

Tautologia: Proposições cujo valor lógico é sempre verdadeiro.

Contradição: Proposições cujo valor lógico é sempre falso.

Sentença satisfatória (também conhecido como contingência): Quando uma proposição, possuí valores lógicos verdadeiros e falsos.

- (P → Q) ↔ (¬ P v Q)

P	Q	¬ P	(P → Q)	(¬ P v Q)	(P → Q) ↔ (¬ P v Q)
v	v	f	V	v	v
v	f	f	F	f	v
f	v	v	V	v	v
f	f	v	V	v	v

Tautologia.

- ~(p v q) ^ (p ^q)

Usando a lei de Morgan ~(p v q) = (~p ^ ~q) , temos a seguinte tabela verdade:

p	q	~p	~q	~p ^ ~q	p ^ q	~(p v q) ^ (p ^ q)
v	v	f	f	f	v	f
v	f	f	v	f	f	f
f	v	v	f	f	f	f
f	f	v	v	v	f	f

Contraposição.

- (P ^ (Q v ¬ Q)) → ((P ^ Q) v (P ^ ¬ Q))

P	Q	¬ Q	Q v ¬ Q	P ^ (Q v ¬ Q)	(P ^ Q)	(P ^ ¬ Q)	(P ^ Q) v (P ^ ¬ Q)	(P ^ (Q v ¬ Q)) → ((P ^ Q) v (P ^ ¬ Q))
v	v	f	v	v	v	f	v	v
v	f	v	v	v	f	v	v	v
f	v	f	v	f	f	f	f	v
f	f	v	v	f	f	f	f	v

Tautologia.

- [p and (if p then q)] or [if p then NOT q]

p	q	~q	p → q	p ^(p → q)	p → ~q	P ^ (p → q) v (p → ~q)
v	v	f	v	v	f	v
v	f	v	f	f	v	v
f	v	f	v	f	v	v
f	f	v	v	f	v	v

Tautologia.

2) Quantificador Escreva as sentenças seguintes usando a notação de quantificador (isto é, use os símbolos ∃ e/ou ∀). Apresente a negação de cada sentença. *Obs: Não se preocupe com a veracidade das sentenças.*

a) Todos os inteiros são divisíveis por 1.
∀x ∈ Z, x é divisível por 1.
b) Há um inteiro que quando dividido por 3 sempre é igual a 9.
∃x ∈Z, x/3=9.
c) Todo inteiro é par.
∀x ∈ Z, x é par.
d) Existe um inteiro cujo cubo é 81.
∃x ∈ Z, x^3=81.
e) Para todo inteiro existe outro inteiro, que quando são multiplicados o resultado é sempre igual à zero.
∀x ∈ Z, ∃y ∈ Z, xy=0.

3)Quantificador Assinale as questões abaixo como verdadeiras ou falsas. Considere x e y números inteiros. Justifique suas respostas.

a) ∃x (∃y (y + 1 < x)).**Verdadeiro. tome x=y+2**
b) ∀x (∀y (x > y)).**Falso, basta exibir um valor que não satisfaz. Por ex, x=2, y=1.**
c) ∀x, $x^2 \geq 0$. **Verdadeiro, todo número elevado ao quadrado é maior ou igual a zero.**
d) ∃x, ∃y, x^2 = y. **Verdadeiro. Por ex: x=3, y=9**
e) (∀x)(∃y)(x +y =x).**Verdadeiro, tome y=0**
f) ∀x, ∀y, x é par se x = 2y.**Verdadeiro. (definição de no par)**

4) Métodos de Prova. Prove que:

a) Se a soma de dois inteiros é par, então a diferença entre esses dois números também é par.
Sejam x e y números inteiros, tal que x + y é par. Pela definição de par x + y = $2k_1$, k_1∈ Z. Se subtrairmos ambos os lados por 2y, obteremos
x +y–2 y = ($2k_1$ – 2y)
x – y = 2(k_1 – y), como k_1 e y são números inteiros, sua subtração também terá como resultado um número inteiro. Desta forma podemos fazer k_1 – y = k. Assim, x – y = 2k, k ∈ Z.

Portanto x – y é par.

b) Se n é um inteiro ímpar, então n^2 é ímpar.
Seja n um número inteiro ímpar. Pela definição temos que n = 2k +1, k ∈ Z. Se elevarmos ambos os lados ao quadrado, teremos:
$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 2k.1 + 1 = 2(2k^2 + k) + 1$, k ∈Z. Como k é um inteiro sua soma também será um número inteiro. Fazendo $k_1=(2k^2 + k)$, tem-se $n^2=2k_1+1$, $k_1 \in Z$.

Portanto n^2 é ímpar.

c) Se a e b são ambos quadrados perfeitos então a.b também é.
Assumindo a e b sejam quadrados perfeitos temos que, a = m^2 e b = n^2, m e n ∈Z. Multiplicando a por b, temos: a.b = m^2. n^2. Pela regra da associatividade e comutatividade da multiplicação, implica que a.b = $(m.n)^2$. Como m e n, ∈ Z sua multiplicação também será um número inteiro. Fazendo m.n=k, tem-se que a.b=k^2, k∈ Z .

Portanto a.b é um quadrado perfeito.

d) Se $x^2 - x - 2 = 0$ então $x \neq 0$.

Seja $x^2 - x - 2 = 0$. Suponha por contradição que x = 0. Substituindo x por 0, tem-se que $0^2 - 0 – 2 = 0$. Assim temos que -2 = 0 o que é um absurdo!

Portanto $x \neq 0$.

e) Seja n é um inteiro. Se 3n +2 é impar então n é ímpar. (Prova por contraposição)

Sentença contrapositiva: Se n é par então 3n + 2 é par.

Seja n um número inteiro par. Pela definição de número par temos que n = 2k, $k \in Z$. Multiplicando ambos os lados por três temos 3n=3(2k) . Adicionando 2 de ambos os lados da igualdade, obteremos 3n + 2 = 3(2k) + 2. Reescrevendo temos, 3n + 2 = 2(3k +1), $k \in Z$. Desta maneira como k é um inteiro a equação 3k + 1 também será. Logo a definição de par é obedecida.

Portanto 3n+2 é par. Assim, a sentença original também está provada, já que provamos sua contrapositiva, que é uma sentença logicamente equivalente.

f) Se z = xy, onde x e y são inteiros positivos, então $x \leq \sqrt{z}$ ou $y \leq \sqrt{z}$. (Prova por contraposição)

Sentença contrapositiva: Se $x > \sqrt{z}$ e $y > \sqrt{z}$ então $z \neq xy$.

Assumindo que x e y são números inteiros positivos e que $x > \sqrt{z}$ e $y > \sqrt{z}$. Se multiplicarmos ambos os lados da sentença $x > \sqrt{z}$, por y temos $x.y > \sqrt{z}.y$ Como $y > \sqrt{z}$,conclui-se que:
$x.y > \sqrt{z}. \sqrt{z}$. Assim
$x.y > z$, isso mostra que $z \neq xy$.

Portanto como as sentenças são equivalentes, isso mostra que se z = xy, onde x e y são inteiros positivos, então $x \leq \sqrt{z}$ ou $y \leq \sqrt{z}$.

g) O inteiro n é par **se somente se** n^2 é par.

i. Ida: Se n é um número inteiro par então n^2 é par.

Seja n um número inteiro par, podemos escrevê-lo segundo a definição de par como n = 2k, $k \in Z$. Se elevarmos ambos os lados ao quadrado, temos
$n^2 = (2k)^2$
$n^2 = 4k^2$
$n^2 = 2(2k^2)$.) número $(2k^2)$ também é um número inteiro. Fazendo,
$k_1 = (2k^2)$, tem-se que $n^2 = 2k_1$, $k_1 \in Z$. Logo n^2 é par.

Portanto se n é um inteiro par então n^2 também é.

ii. Volta: Se n^2 é par então n é par.

Prova por contraposição:
Sentença contrapositiva: Se n é ímpar então n^2 é ímpar.
Assumindo n um número inteiro ímpar. Pela definição temos que n = 2k +1, $k \in Z$. Se elevarmos ambos os lados ao quadrado, teremos: $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 2k.1 + 1 = 2(2k^2 + k) + 1$, $k \in Z$. Como k é um inteiro o número $(2k^2 + k)$ também será um número inteiro. Logo n^2 é ímpar, assim podemos concluir que se n^2 é par então n é par, devido as sentenças serem logicamente equivalentes.

De i e ii podemos concluir que um inteiro n é par see n^2 é par.

h) Sejam a, b e c e d inteiros se a|b e c|d então ac|bd.

Assumindo a, b, c e d números inteiros. Supondo que a|b e c|d. Logo $b = a.k_1$ e $d = c.k_2$, k_1 e $k_2 \in Z$. Multiplicando b por d, teremos $b.d = (a.k_1).(c.k_2) = a.c.(k_1.k_2)$. Como k_1 e k_2 são números inteiros, a multiplicação entre eles também será um número inteiro, logo $(k_1.k_2) = k$, $k \in Z$. Assim temos que b.d = a.c.k

Portanto, ac|bd.

i) Prove que um inteiro é ímpar se e somente se é a soma de dois inteiros consecutivos.

n é um número inteiro ímpar see n = k+(k+1).

i. Ida: Se n é um inteiro ímpar então n = k+(k+1).

Sendo n um número inteiro ímpar, logo pela definição de números ímpares temos que, n = 2k+1, $k \in Z$. Organizando a equação obteremos n = k+(k+1).

Portanto n = k+(k+1).

ii. Volta: Se n = k+(k+1) então n é ímpar.

Assumindo n = k + (k+1), k e $n \in Z$. Assim, temos n = 2k +1.

Portanto n é ímpar.

De i e ii podemos concluir que um inteiro é ímpar se somente se é a soma de dois inteiros consecutivos

j) O cubo de um número inteiro par é divisível por oito.

Seja n um número inteiro par. Logo, n = 2k, $k \in Z$. Elevando ambos os lados ao cubo, obtemos $n^3 = (2k)^3 = 8k^3$. Como k é um inteiro, logo k^3 também é.

Portanto n^3 é divisível por oito.

k) Prove que a soma do cubo de três números naturais consecutivos é divisível por 3.

Seja n um número natural, considerando-o o termo central, temos que n-1 é o número anterior e n+1 o posterior. Elevando cada número ao cubo e posteriormente somando temos que, $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2)$. Como $n \in N$, $n(n^2 + 2)$, também faz parte desse conjunto numérico. Fazendo, $k= n(n^2 + 2)$, tem-se que $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3= 3k$, $k \in Z$.

Portanto $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3$ é divisível por 3.

l) Se dois inteiros são divisíveis por algum inteiro n, então sua soma é divisível por n.

Assumindo a e b números inteiros divisíveis por n, podemos afirmar que, $a = n.k_1$, $b = n.k_2$, k_1 e $k_2 \in Z$. Somando as equações temos que, $a + b = n.k_1 + n.k_2$, colocando n em evidência obteremos, $a + b = n.(k_1 + k_2)$, como k_1 e $k_2 \in Z$, logo a sua soma também pertence a este conjunto.

Portanto a+b é divisível por n.

m) O produto de dois inteiros consecutivos quaisquer é par.

Sejam n e (n+1) dois inteiros consecutivos. Então, um será um número par e outro um número ímpar. Multiplicando esses dois valores, obteremos $2k(2k+1) = 2(2k^2 + k)$, $k \in Z$. Como k é um inteiro isso implica que $(2k^2 + k)$ também é um inteiro.

Portanto o produto entre n e (n+1) é par.

n) O quadrado de algum inteiro ímpar é igual a 8k + 1 para algum inteiro k.

Seja n um número inteiro ímpar, pela definição temos que $n = 2k_1+1$, $k_1 \in Z$. Elevando ao quadrado ambos os lados, teremos $n^2 = (2k_1 + 1)^2 = 4k_1^2 + 4k_1 + 1 = 4k_1(k_1+ 1) + 1$. Analisando a equação podemos perceber que, $k_1 (k_1 + 1)$ é um produto entre dois números inteiros consecutivos, como mostramos no exercício da letra m, esse produto gera um número par. Assim podemos fazer a seguinte substituição, $n^2 = 4(2k_1)+ 1 = 8k_1+1, k_1 \in Z$.

Portanto um número inteiro ímpar ao quadrado é é igual a 8k + 1 para algum inteiro k.

5) Contra-Exemplo.

a) Considere a e b números inteiros. Se $a^2 = b^2$ então a=b.

Supondo $a^2 = b^2 = 4$ nesse caso a ou b poderiam ser 2 ou -2, porém $2 \neq -2$. Logo, se $a^2 = b^2$ não necessariamente a = b.

b) Se a e b são inteiros não negativos com a | b, então $a \leq b$.

Tome a = 4 e b = 0. Logo 4|0, porém a>b (4>0).

c) Todo inteiro positivo é a soma dos quadrados de dois inteiros.

Tome 7 como contra-exemplo, observaremos que não existe dentro do conjunto dos números inteiros dois termos que somados tem como resultado esse número.

d) Se a, b e c são inteiros positivos então $a^{(b^c)} = (a^b)^c$.

Tomando a = 2, b = 3 e c = 4. Substituindo, tem-se que $2^{(3^4)} = 2^{81}$ e $(2^3)^4 = 2^{12}$. Logo $a^{(b^c)} \neq (a^b)^c$ ($2^{(3)4} \neq 2^{81}$)

e) Sejam a, b e c números inteiros. Se a|bc então a|b ou a|c
Tome a=10, b=5 e c=2. Logo 10|(2.5) mas 10 não divide 5 e nem divide 2.