UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – UFRPE

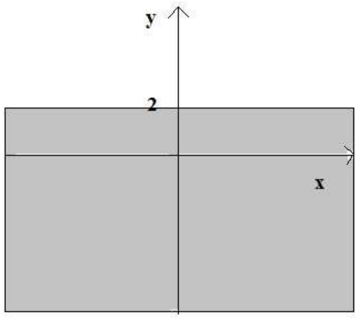
Matemática Discreta – Bacharelado em Sistemas de Informação
Resolução - 3ª Lista de Exercícios

Nome ____ Nota _________

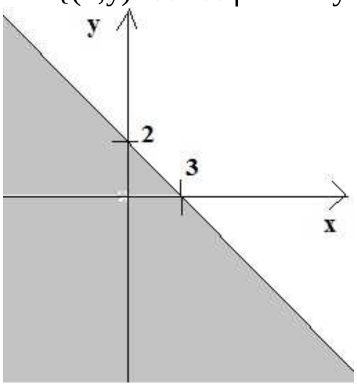
RESOLUÇÃO

1) Para cada uma das relações a seguir, em $\Re$, desenhe uma figura para mostrar a região do plano que a descreve.

a) $x\ R\ y \longleftrightarrow y \leq 2$



b) $S = \{(x,y) \in \Re \times \Re \mid 2x + 3y - 6 \leq 0\}$



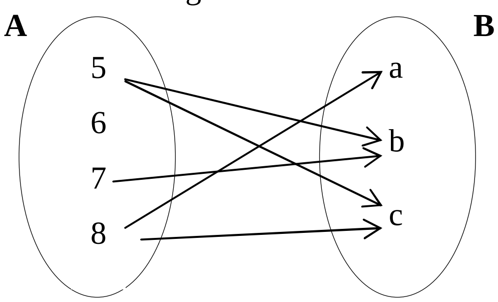
x	y
0	2
3	0

2) São dados A={5,6,7,8} e B={a, b, c}. Seja R a seguinte relação de A para B:
R = {(5,b), (5,c) (7,b) (8,a) (8,c)}

a) Determine a matriz da relação.

$$\mathbf{MR} = \begin{array}{c} \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right] \end{array}$$

b) Desenhe o diagrama de setas de R



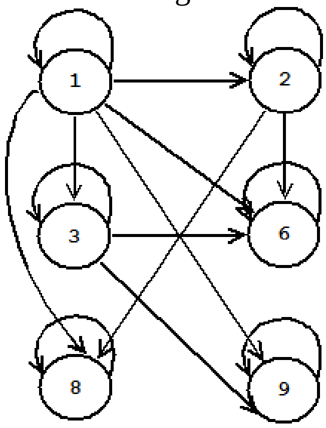
c) Ache a relação inversa R^{-1} de R
R^{-1}= {(b,5) (c,5) (b,7) (a,8) (c,8)}

d) Determine o domínio e a Imagem de R
DOM(R) = {5,7,8}
IMA(R)= {a,b,c}

3) Seja A={1,2,3,6,8,9} e seja a relação em A definida por “x divide y”, escrita x | y .

a) Escreva R como um conjunto de pares ordenados
R = {(1,1) (1,2) (1,3) (1,6) (1,8) (1,9) (2,2) (2,6) (2,8) (3,3) (3,6) (3,9) (6,6) (9,9)}

b) Desenhe seu grafo orientado



c) Ache a relação inversa R^{-1}de R. R^{-1} pode ser descrita em palavras? Como?
R^{-1} = {(1,1) (2,1) (3,1) (6,1) (8,1) (9,1) (2,2) (6,2) (8,2) (6,3) (9,3) (6,6) (9,9)}
R^{-1} :y divide x.

4) Sejam A={4,5,6}, B={a,b,c} e C={x,y,z} R={(4,a) (4,c) (5,a) (6,b)} e S={(a,x) (a,y) (a,z) (c,x)}.

a) Ache, se for possível, a relação composta RoS.
RoS = {(4,x) (4,y) (4,z) (5,x) (5,y) (5,z)}.

b) Ache, se for possível, a relação composta SoR.
SoR = { }.

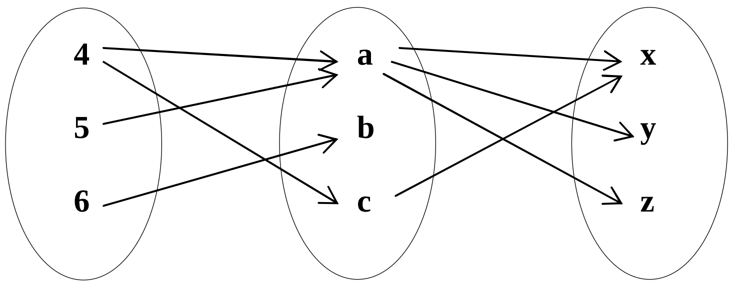
c) Ache as matrizes MR, MS, MRoS.

$$\mathbf{MR} = \begin{array}{c} \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$
MS=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$
MRoS=\begin{array}{c} \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

d) Desenhe o diagrama de setas das relações R e S. Observe os caminho de 4 e 5 para x, y e z.



5) Considere as seguintes relações em um conjunto A={3, 4, 5}. Determine se as relações são reflexivas, anti-reflexivas, simétricas, transitivas ou anti-simétircas.E quais desses conjuntos possuem uma relação de equivalência?

a) R={(3,3) (3,4) (3,5) (5,5)}

Reflexiva: Não, pois 4∈ A porém (4,4) ∉ R.
Anti-reflexiva: Não, pois 3R3 e 5R5.
Simétrica: Não, pois (3,4) ∈ R, porém (4,3) ∉ R.Nesse caso também temos (3,5) ∈ R, mas (5,3) ∉ R.
Anti-simétrica: Sim, pois temos que se (xRy∧yRx) então x = y, (5,5) e (3,3).
Transitiva: Sim, pois se (x,y) ∈ R e (y,z) ∈ R então (x,z) ∈ R

(3,3) e (3,4) -> (3,4)
(3,3) e (3,5) -> (3,5)
(3,5) e (5,5) ->(3,5)
Não é equivalente, afinal essa relação não é reflexiva.

b) B = {(3,3) (3,4) (4,3) (4,4) (5,5)}

Reflexiva: Sim, pois (3,3) (4,4) e (5,5) ∈ B.
Anti-reflexiva: Não, pois B é reflexiva.
Simétrica: Sim, pois se 3R4 então 4R3.
Anti-simétrica: Não, pois 3R4 e 4R3, porém 4 ≠ 3.
Transitiva: Sim, pois se (x,y), ∈B e (y,z) ∈ B então (x,z) ∈B

É equivalente, afinal essa relação é reflexiva, simétrica e transitiva.

c) T = {(3,3) (3,4) (4,4) (4,5)}
Reflexiva:Não, pois 5∈ A, porém (5,5) ∉ T.
Anti-reflexiva: Não, pois 3R3 e 4R4.
Simétrica: Não, pois (3,4) ∈ T, porém (4,3) ∉ T.Nesse caso também temos (4,5) ∈ R, mas (5,4) ∉ T.
Anti-simétrica: Sim, pois temos que se (xRy∧yRx) então x = y, (4,4) e (3,3).
Transitiva: Não, pois (3,4) ∈ T e (4,5) ∈ T, mas (3,5) ∉ T.
Não é equivalente, pois essa relação não é transitiva, reflexiva e simétrica.

d) V = ∅
Reflexiva: Não, pois ∀x ∈ A, (x,x) ∉ V. Logo V é irreflexiva.
Simétrica: Sim, por vacuidade.
Anti- Simétrica: Sim, por vacuidade.
Transitiva: Sim, por vacuidade.

e) C = A × A   A={3,4,5}
A x A = {(3,3) ,(3,4), (3,5), (4,3), (4,4), (4,5), (5,3), (5,4), (5,5)}
Reflexiva: Sim, ∀x∈A, (x,x) ∈ C.
Anti-reflexiva: Não, pois C é reflexiva.
Simétrica: Sim, pois ∀x, y ∈ A, se xRy então yRx.
Anti- Simétrica: Não, pois (3R4 ∧ 3R4) mas 3 ≠ 4.
Transitiva: Sim, pois se (x,y) ∈ C e (y,z) ∈ C então (x,z) ∈ C.
É equivalente, afinal essa relação é reflexiva, simétrica e transitiva.

6) Determine se as relações abaixo são reflexivas, simétricas, anti-simétricas ou transitivas. Justifique suas respostas. (OBS: o conjunto S a partir da letra c é o conjunto de pessoas no Brasil)

a) S = ℤ
x R y ⟺ x – y é múltiplo inteiro de 3.
Reflexiva: Sim, pois ∀x ∈ Z, x – x = 0, e zero é múltiplo de 3. Logo xRx.
Simétrica: Sim, pois:
Se xRy tem-se que x – y é múltiplo inteiro de 3. Logo x-y=3k, k∈Z. Multiplicando por (-1) tem-se que y-x=3(-k). Assim y – x também é um múltiplo de 3. Portanto xRy.(Lembre-se que o conjunto é dos números inteiros)
Anti-simétrica: Não, tome como exemplo x = 6 e y=3, xRy e yRx, porém x ≠ y.
Transitiva: Sim, pois se xRy e yRz tem-se que x – y =3k_1, k_1∈Z e y – z =3k_2, k_2∈Z. Adicionando as duas equações tem-se que x-y+y-z= 3k_1+3k_2. Reescrevendo, tem-se x-z=3(k_1+k_2). Assim, x – z também é um múltiplo inteiro de 3. Portanto, xRz.

b) S = ℕ
x R y ⟷ x.y é par.
Reflexiva: Não, pois ∃x ∈ℕ , tal que (x,x) ∉ R. Como exemplo tome x =1, x.x = 1 não é um número par.
Simétrica: Sim, pois se x.y é par então pelo principio da comutatividade y.x também é par. Logo se xRy então y R x.
Anti-simétrica: Não, pois tome x = 2 e y = 4, xRy e yRx, mas x ≠ y.
Transitiva: Não, considerando o exemplo x = 3 e y = 2 e z = 5. Tem-se: xRy pois x.y = 6 e yRz pois y.z=10 mas (x,z) ∉ R pois x.z = 15 que não é um número par.

c) x R y ⟷ x tem a mesma altura que y.
Reflexiva: Sim, pois (x, x) ∈ R, afinal uma pessoa tem a mesma altura pra ela mesma.
Simétrica: Sim, pois se x tem a mesma altura que y o contrário também é verdade. Logo se xRy então yRx.
Anti-simetrica: Não, pois se x tem a mesma altura que y e y têm a mesma altura que x, não significa dizer que são a mesma pessoa.
Transitiva: Sim, afinal se x tem a mesma altura que y e y tem a mesma altura que z, logo x tem a mesma altura que z. Portanto se xRy e yRz então xRz.

d) x R y ⟷ x é mais alto que y.
Reflexiva: Não, pois (x,x) ∉ R uma pessoa não pode ser mais alta que ela mesmo.
Simétrica: Não, pois se x é mais alto que y consequentemente y é mais baixo que x.
Anti-simétrica: Sim, por vacuidade, xRy e yRx é falsa já que não é possível ocorrer os dois simultaneamente.
Transitiva: Sim, pois se x é mais alto que y e y é mais alto que z tem-se que x é maior que z. Portanto xRy e yRx então xRz.

e) x R y ⟷ x é irmão de y.
Reflexiva: Não, pois x não pode ser irmão dele mesmo, logo (x,x) ∉ R.
Simétrica: Sim, afinal se x é irmão de y então y é irmão de x.
Anti-simétrica: Não, xRy e yRx, porém, x e y são pessoas diferentes.
Transitiva: Sim, já que x é irmão de y e y é irmão de z, então x é irmão de z.

f) x R y ⟷ x é casado com y.
Reflexiva: Não, nesse caso (x,x) ∉ R, pois x não pode ser casado com ele mesmo.
Simétrica: Sim, já que se x é casado com y então y é casado com x.
Anti-simétrica: Não, xRy e yRx, porém, x e y são pessoas diferentes.

Transitiva: Sim, por vacuidade, pois não é possível ocorrer xRy e yRz simultaneamente. (no Brasil não é permitido uma pessoa ser casada com duas pessoas ao mesmo tempo).

7) Prove que:

a) Se R é uma relação de equivalência em um conjunto S então R^{-1} também é.

Considere por hipótese que R é uma relação de equivalência. Logo R é reflexiva, simétrica e transitiva. Para R^{-1} seja uma relação de equivalência é necessário que também possua essas propriedades.

i) Reflexiva: Como R é reflexiva, tem-se que $\forall x \in S$, xRx. Pela definição de relação inversa $x R^{-1} x$. Portanto R^{-1} é Reflexiva.
ii) Simétrica: Considere que $x R^{-1} y$. Pela definição de relação inversa yRx. Como R é simétrica yRx então xRy. Pela definição de inversa $y R^{-1} x$. Portanto R^{-1} é Simétrica.
iii) Transitiva: Considere $x R^{-1} y$ e $y R^{-1} z$. Pela definição de relação inversa yRx e zRy. Como R é transitiva e zRy e yRx tem-se que zRx. Pela definição de relação inversa $x R^{-1} z$. Portanto R^{-1}é Transitiva.

De i, ii e iii conclui-se que R^{-1}é relação de equivalência.

b) Se R é uma relação anti-simétrica em um conjunto S, então R^{-1} é anti-simétrica

Considere $xR^{-1}y$ e $y R^{-1}x$. Pela definição de relação inversa yRx e xRy. Como R é anti-simétrica tem-se que x=y. Assim,
Se $xR^{-1}y$ e $yR^{-1}x$ então x = y. Portanto R^{-1} é anti-simétrica.

8) Consideremos o conjunto E de todas as retas de um plano e seja R a relação definida por X R Y se e somente se, X for perpendicular a Y. Esta relação é uma relação de equivalência?

R = {(x,y) ∈ E, tal que x é perpendicular a y}
Reflexiva: Não, nenhuma reta do plano será perpendicular a si mesma, (x,x) ∉R.
Anti-Reflexiva ou I-Reflexiva: Sim, pois ∀x ∈ E, (x,x) ∉R, ou seja x não é perpendicular a x.
Simétrica: Sim, pois ∀x,y∈ E, se x é perpendicular a y então y é perpendicular a x.
Anti-simétrica: Não, pois x perpendicular a y e y perpendicular a x, porém x≠y (fig.1).
Transitiva: Não, pois sejam x,y e z ∈ E conforme figura 2. Assim temos que x perpendicular a y e y perpendicular a z, porém x não é perpendicular a z.

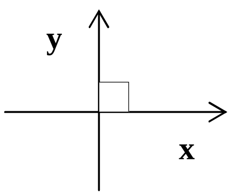


Figura 1.

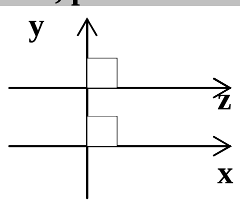


Figura 2.

9) Prove que a relação “é congruente com módulo n” é uma relação de equivalência no conjunto dos números inteiros.
R = {(x,y) ∈Z| x ≡ y(mod n)}

i. **Reflexiva: Sim, pois ∀x ∈ Z, x≡x(mod n), já que n|(x-x), ou seja, n|0, pois 0 = n.0 e 0 ∈ Z. Logo xRx.**
ii. **Simétrica: Sim, pois se x≡y (mod n) tem-se que n|(x-y), ou seja, (x-y)= n.k, k ∈ Z. Multiplicando a igualdade por (-1) tem-se que y-x = n(-k), e -k ∈ Z. Logo n|y-x. Portanto y ≡ x(mod n).**
iii. **Transitiva: Sim, pois se x≡y (mod n) e y≡z (mod n) tem-se que n|(x-y) e n|(y-z). Logo x-y= n.k_1 (1), k_1∈ Z e y-z = nk_2 (2), k_2∈ Z. Adicionando (1) e (2) tem-se que x-y+y-z = n k_1 + n k_2,x-z = n(k_1+ k_2). Como k_1 e k_2 são inteiros, o resultado da soma entre eles também é um inteiro, assim (k_1+ k_2) = k, k ∈ Z. Logo x-z = n.k, k ∈ Z. Portanto x≡ z(mod n).**

De i, ii e iii conclui-se que R é relação de equivalência.

10) Seja R a seguinte relação de equivalência no conjunto A={1,2,3,4,5,6}
R={(1,1) (1,5) (2,2) (2,3) (2,6) (3,2) (3,3) (3,6) (4,4) (5,1) (5,5) (6,2) (6,3) (6,6)}
Ache a partição induzida por R, isto é ache as classes de equivalência de R.

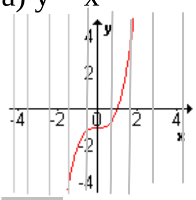
[1] = {1,5}
[2] = {2,3,6}
~~**[3] = {2,3,6}**~~
[4] = {4}
[5] = {1,5}
~~**[6] = {2,3,6}**~~
PARTIÇÃO: [1] ∪ [2] ∪ [4]
OBS$_1$: Partição é uma união de classes de equivalência que satisfaz a seguinte propriedade:

- **A união é igual ao conjunto A e a interseção entre eles tem que ser vazia.**

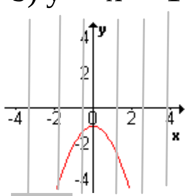
OBS$_2$: Quando houver classes iguais escolhe-se apenas uma para colocar na partição.

11) Verifique gráficamente se as relações abaixo são aplicações, no conjunto R dos números reais:

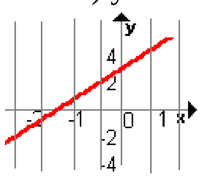
a) $y = x^3$ b) $y = -x^2 - 1$ c) $y - 2x = 3$



Sim.

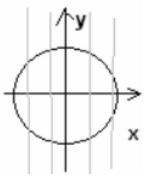


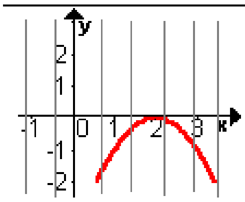
Sim.



Sim

d) $x^2 = 25 - y^2$; $y < 0$ e) $y = -x^2+4x-4$



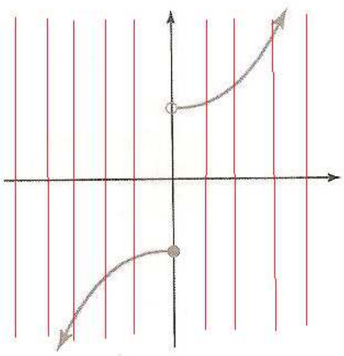


Observação: Considere apenas os Valores y < 0. Não é função de R em R, pois, não existe imagem Para valores fora do intervalo]-5,5[.

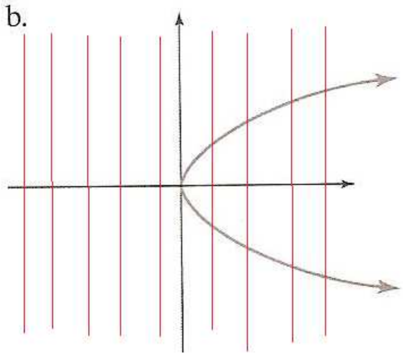
Sim.

12) As figuras a seguir ilustram diversas relações binárias R em R. Quais delas são funções?

a.



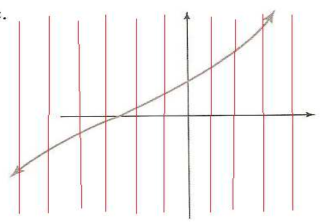
b.



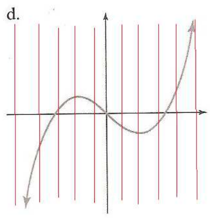
Sim. Observe que onde y é zero, há um intervalo aberto e outro fechado, logo todo o domínio liga-se apenas a uma imagem.

Não, pois existem elementos no domínio com duas imagens.

c.



d.



Sim.

Sim.

13) Considere as funções f, g e h, de R em R, definidas por:

$f(x) = x^2+1$ $\quad$ $g(x) = 2x-3$ $\quad$ $h(x) = x^3 - x^2$

a) $(g \text{ of }) = g(f(x)) = g(x^2+1) = 2(x^2+1)-3$

b) $g(h(x)) = g(x^3 - x^2)) = 2(x^3 - x^2) - 3 = 2x^3 - 2x^2 - 3$

c) $g \circ (f \circ h) = g(f(h(x))) = g(f(x^3 - x^2)) = g((x^3 - x^2)^2 + 1) = 2((x^3 - x^2)^2 + 1) - 3$

d) $(f \circ g) \circ g = f(g(g(x))) = f(g(2x-3)) = f(2(2x-3)-3) = f(4x-6-3) = f(4x-9) = (4x-9)^2+1$

e) $(f \circ h) \circ g = f(h(g(x))) = f(h(2x-3)) = f((2x-3)^3 - (2x-3)^2) = ((2x-3)^3 - (2x-3)^2)^2 + 1$

f) $f \circ (h \circ g) = f(h(g(x))) = ((2x-3)^3 - (2x-3)^2)^2 + 1$

14) Para cada caso a seguir determine se a função é injetora, sobrejetora, ou ambos. Prove suas afirmações.

a) f: Z→Z definida por $f(x) = x^2+1$

Injetora: Não, pois tome $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$, $f(x_1) = f(x_2) = 5$, porém $x_1 \neq x_2$
Sobrejetora: Não. Tome y = -1 um elemento do contra-domínio. Não existe nenhum inteiro x, tal que $f(x)=x^2+1 = -1$. Portanto -1 não é imagem de nenhum elemento do domínio. Logo imagem ≠ contra-domínio.

b) f: Q→Q dada por f(x) = 3x+4

Injetora: Sim, pois $\forall x_1, x_2 \in Q$ se $f(x_1) = f(x_2)$, ou seja, $3x_1+4=3x_2+4$ temos que $x_1=x_2$.
Sobrejetora: Sim. Seja b ∈ Q arbitrário. Procuramos um a∈ Q tal que f(a) = b. Temos que, a = (b-4)/3. Assim teremos f(a) = 3[(b-4)/3]+4 = b. Portanto é sobrejetora.

c) f: N→N definida por f(x)=x+7

Injetora: Sim, pois $\forall x_1, x_2 \in N$,
Se $f(x_1) = f(x_2)$, ou seja, $x_1+7=x_2+7$. Subtraindo 7 de ambos os lados da equação temos que $x_1=x_2$.
Sobrejetora: Não, pois 0 ∈ N, mas 0 não é imagem de nenhum elemento do domínio. Logo imagem ≠ contra-domínio.

d) f: N→N definida por $f(x) = 2^x$

Injetora: Sim, $\forall x_1, x_2 \in N$ se $f(x_1) = f(x_2)$, ou seja, $2^{x1}=2^{x2}$. Aplicando a função $\log_2$ de ambos os lados, temos que $x_1=x_2$.
Sobrejetora: Não, pois 0 ∈ N, mas 0 não é imagem de nenhum elemento do domínio. Logo imagem ≠ contra-domínio.

e) f:{1,2,3}→{p,q,r}, onde f = {(1,q) (2,r) (3,p)}

Injetora: Sim, pois todo elemento da imagem está associado a apenas um elemento do domínio.
Sobrejetora: Sim, pois todos os elementos do contra-domínio estão associados a algum elemento do domínio. Assim, imagem = contra-domínio.

f) f: Z→Z definida por f(x)=x/2 se x é par e f(x)=(x-1)/2 se x é ímpar

Injetora: Não, tome $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$. Logo, $f(x_1) = 2/2=1$ e $f(x_2)=(3-1)/2=1$, porém $x_1 \neq x_2$.
Sobrejetora: Sim. Considere r um elemento qualquer do contra-domínio Z. Se r for ímpar, tem-se que x = 2r +1, se r for par tem-se que x = 2r tal que:

i) f(x) = f(2r) = 2r/2 = r se x é par.
ii) f(x) = f(2r+1) = (2r +1 -1)/2 = r se x é ímpar.

De i e ii conclui-se que qualquer elemento do contra-domínio é imagem de um elemento do domínio. Portanto, imagem = contradomínio