UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – UFRPE

Matemática Discreta – Bacharelado em Sistemas de Informação
4ª Lista de Exercícios – Parte 1

Nome ____ Nota __________

Indução e Recursão

1) Prove utilizando o princípio da indução matemática, que são verdadeiras as seguintes igualdades:

   a) $1+4+7+...+(3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$, $n \geq 1$

   b) $9+9x10+9x100+...+9x10^{n-1}=10^n-1$, n é um número inteiro positivo.

   c) $2+6+10+...+(4n-2) = 2n^2$, n é um número inteiro positivo.

   d) $4+10+16+...+(6n-2) = n(3n+1)$, $n \geq 1$

   e) $1^2 +3^2 +...+(2n-1)^2= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$, n é um número inteiro positivo.

   f) $1+a+a^2+...+a^{n-1} = \frac{a^n-1}{a-1}$, para $a \neq 0$, $a \neq 1$, a é um inteiro positivo.

   g) $n^2>n+1$ para $n\geq2$

   h) $10^n+3.4^{n+2}+5$ é divisível por 9, n é um inteiro positivo

   i) $n^2 + n$ é par, $\forall\, n \geq 1$

   j) $1 + 8 + ... + n^3 = (n(n + 1)/2)^2$, $\forall\, n \geq 1$

   k) $(1- ½).(1 – 1/3).(1- ¼)...(1 – 1/(n+1)) = 1/(n+1)$, $\forall\, n \geq 1$

   l) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ...+ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, n é um inteiro positivo

   m) 1.1!+2.2!+3.3!+...+n.n! = (n+1)! -1 , onde n! é o produto dos inteiros

   positivos de 1 a n. E n é um número inteiro positivo.

2) Suponha que Joana casou-se e teve três filhos. Vamos chamar estes filhos de geração 1. Suponha agora que cada um destes filhos tenha três filhos; então, a geração 2 contém nove descendentes. Isso continua de geração em geração. Escreva a relação de recorrência para a n-ésima geração.

3) A função n!, pode ser definida recursivamente. Qual é a relação de recorrência para esta função?

4) Certo banco está cobrando 2% de juros ao mês. João tomou emprestado R$ 2000,00 e deve pagar prestações mensais fixas de R$200,00. A primeira

prestação será paga ao final do primeiro mês de empréstimo. Encontre a relação de recorrência para a dívida de Tadeu ao final do n-ésimo mês.

5) Encontre os cinco primeiros valores das sequências abaixo:
   a) S(1) = 10
      S(n) = S(n-1) +10, para n>1
   b) S(1) = 1
      S(n) = S(n-1) + 1/n , para n>1
   c) B(1) = 1
      B(n) = B(n-1) + n^2 , para n $\geq$ 2
   d) B(1) = 1; B(2) = 2; B(3) = 3
      B(n) = B(n - 1) + 2B(n - 2) + 3B(n - 3), para n > 3

6) Seja $b_0 = 1$ e, para n > 0, seja $b_n = 3.b_{n-1} – 1$. Com esses dados responda as seguintes perguntas:
   a) Quais os três primeiros termos?
   b) Prove: $b_n = (3^n+1)/2$

7) Seja $a_0=3$ e, para n>0, $a_n = a_{n-1} + n$. Usando essa sequência responda as seguintes perguntas:
   a) Quais são os três próximos termos da sequência?
   b) Prove que $a_n = \frac{n^2+n+6}{2}$