

# Tópicos em Otimização

## **Modelagem**

**Slides disponibilizados pelo Prof. Fernando Gomide -  
Unicamp**

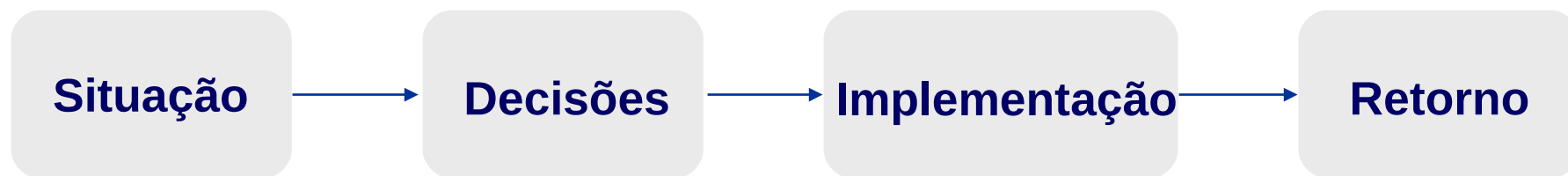
# Fundamentos de Modelagem

- Introdução à modelagem e decisão
- Definição de modelos
- Modelagem e dados
- Ciclos na construção de modelos
- Modelagem na decisão
- Validação de modelos

# Introdução à Modelagem e Decisão

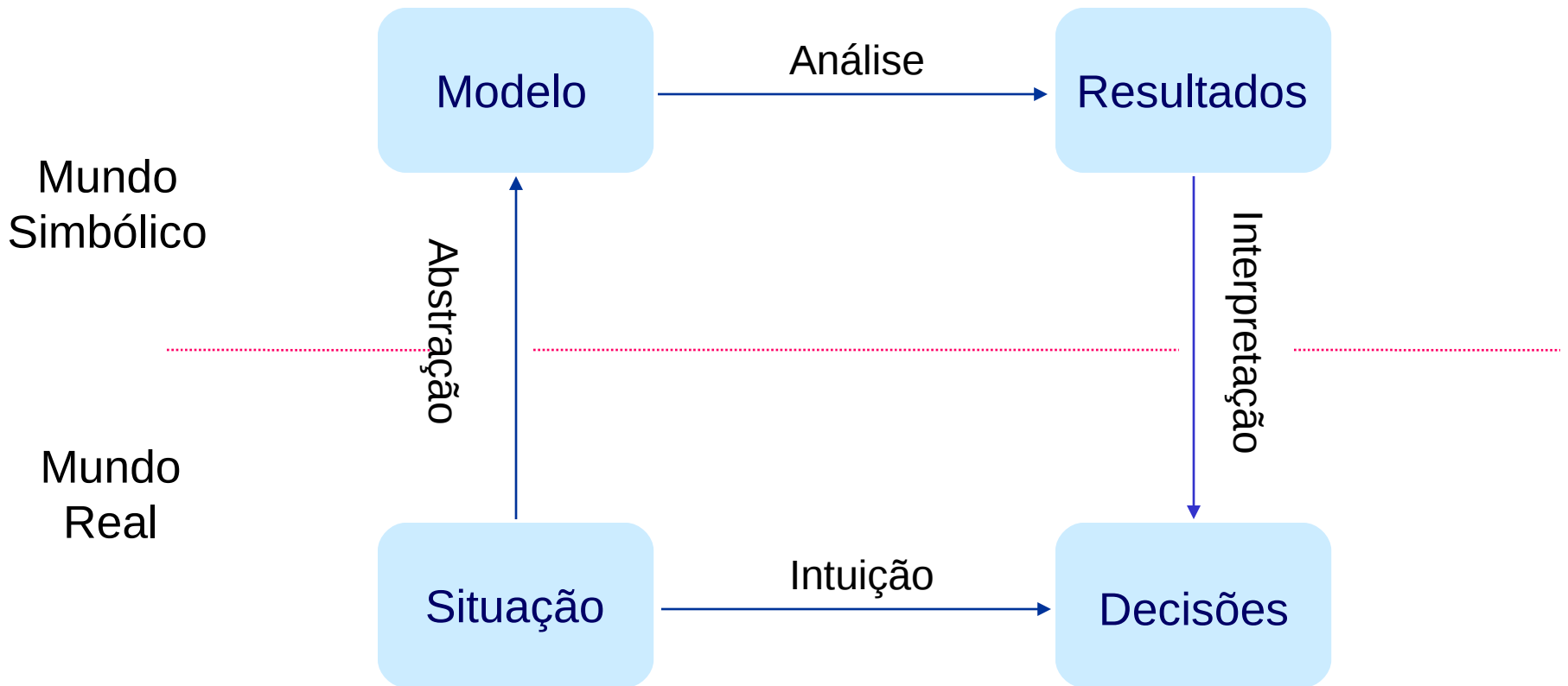
- **Introdução**
  - Modelagem: não é mais arte sofisticada só para especialistas
  - Avanço tecnológico
    - Computadores pessoais
    - Programas e sistemas com interfaces de alto nível
- **Modelos:** essenciais para melhorarem a tomada de decisão
- **Itens importantes em qualquer situação de decisão**
  - Quais são as questões fundamentais
  - Quais alternativas a serem investigadas
  - Onde focalizar a atenção

# Abordagem para Tomada de Decisão

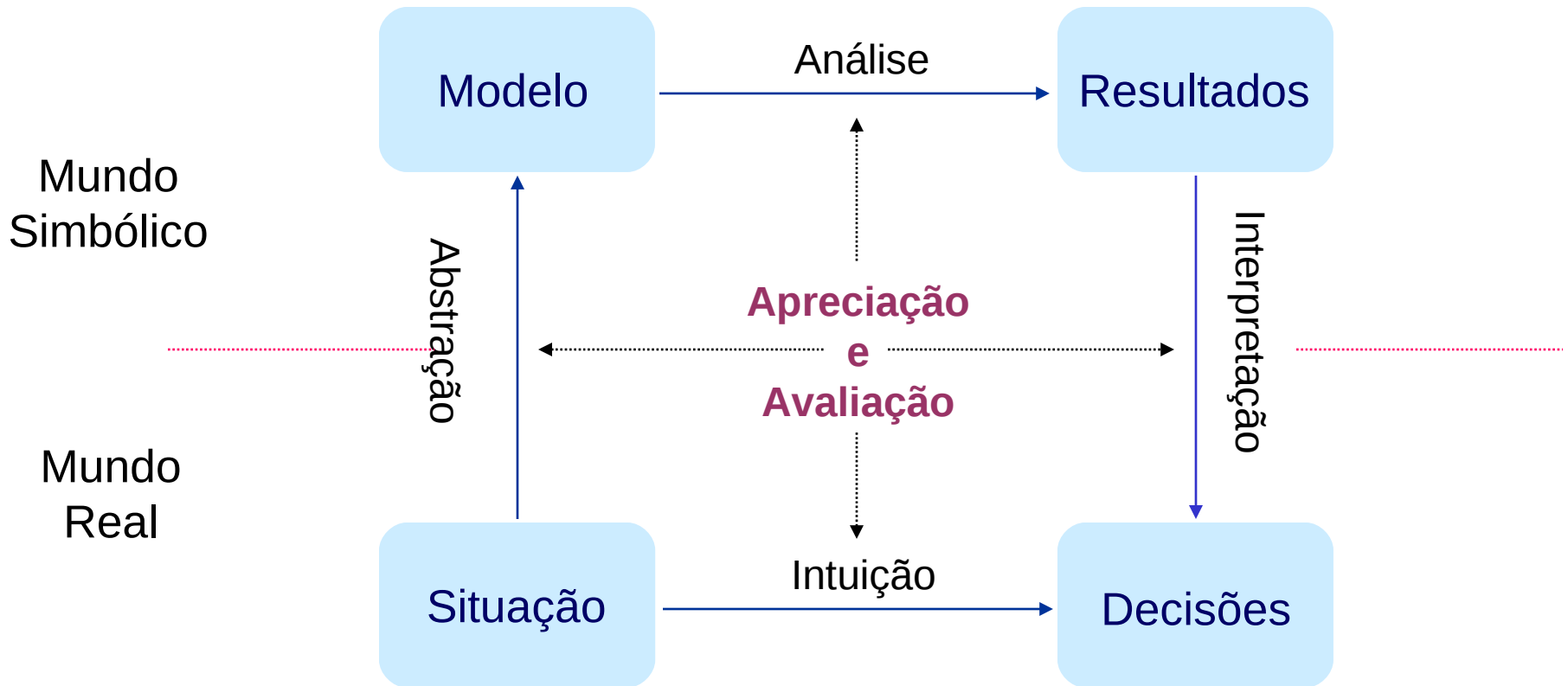


- Situação envolvendo alternativas, eventualmente conflitantes
- Decisões tomadas para resolver competição e conflitos
- Decisões implementadas
- Consequências na forma de *payoffs*; nem todos são financeiros

# Processo de Modelagem



# Apreciação e Avaliação no Processo de Modelagem



- **Abstração, formulação do modelo, interpretação e implementação**
  - cruciais para o processo de modelagem para tomada de decisão
- **Essencial que se entenda e que fique claro:**
  - Quais situações são passíveis de serem modeladas
  - Qual é a disponibilidade e acessibilidade de dados para análise do modelo e para obter recomendações ou resultados em tempo hábil e a custos praticáveis
  - O que fazer para obter o máximo do modelo em termos da interpretação do modelo e da implementação de decisões.
- **Modelos tem papéis diferentes nos diferentes níveis de uma firma**
  - Altos: planejamento estratégico, futuro, planos contingência, tempo reação
  - Médios: planejamento, coordenação, logística, adaptação
  - Baixos: programação, operação, expansão, análise impacto

- **Modelos proporcionam um meio para análises lógicas consistentes**
- **São utilizados, pelos seguintes motivos, entre outros:**
  - Forçam a explicitação dos objetivos
  - Forçam a identificação dos tipos de decisões que influenciam os objetivos
  - Forçam a identificação das interações e *trade-offs* entre as decisões
  - Forçam raciocínio criterioso sobre variáveis e definições quantificáveis
  - Forçam a consideração de dados que são pertinentes para quantificação das variáveis e a determinação de interações entre elas
  - Forçam a identificação de restrições ou limitações dos valores das variáveis
  - Facilitam comunicação e trabalho em grupo
  - Podem ser ajustados e melhorados com a experiência e a histórica, isto é, proporciona uma forma de **aprendizagem adaptativa**
- **Modelos proporcionam um veículo efetivo para o uso de técnicas analíticas, programas de computador e sistemas de computação no processamento e armazenagem de dados**



# Tipos de Modelos

Tipo de Modelo	Caractewrísticas	Exemplos
Físico	Tangível Fácil compreensão Reprodução difícil Manipulação difícil Escopo uso: muito baixo	Modelo aeronaves Modelos de residências Modelos de cidades
Analógico	Intangível Compreensão difícil Reprodução mais fácil Manipulação mais fácil Escopo de uso: baixo	Mapas de estradas Velocímetro Gráficos
Simbólico	Intangível Compreensão mais difícil Reprodução muito fácil Manipulação muito fácil Escopo de uso: amplo	Modelos simulação Modelos algébricos Modelos planilhas

# Modelos Simbólicos

- Matemática: estabelecer relações entre variáveis de interesse
- Modelo matemático: conciso, preciso, computável
- Dados numéricos dão significado aos modelos simbólicos

$$T = \frac{D}{V}, \quad T = \text{tempo}, D = \text{distância}, V = \text{velocidade}$$

$$T = \frac{D}{V} + (R \times N), \quad R = \text{tempo médio por parada}, N = \text{número esperado de paradas}$$

- **Modelo:** abstração (aproximação) cuidadosa (tratável) da realidade
- Detalha-se o modelo o suficiente para que:
  - os resultados satisfaçam as necessidades
  - seja consistente com os dados disponíveis
  - haja alta correlação entre o previsto pelo modelo e a realidade
  - possa ser analisado dentro das disponibilidades

# Modelos de Decisão

Representam situações de decisão

Variáveis de Decisão

Objetivos

Definem medidas de desempenho que refletem objetivos

Modelo Simbólico

Medidas de Desempenho

Estabelecem variáveis decisão

Limitações

Especificação das variáveis que afetam os objetivos são cruciais na modelagem

# Classes de Modelos de Decisão

- **Funções do negócio:** financeiro, custos, marketing, operações
- **Área de aplicação:** engenharia, economia, militar, logística, etc.
- **Organizacional:** estratégico, tático
- **Horizonte:** curto prazo, longo prazo
- **Tipo matemática:** linear, não linear
- **Dinâmica:** estático, dinâmico
- **Tecnologia:** programas, planilhas, sistemas
  
- **Modelos de cada uma dessas classes podem ser:**
  - Determinísticos
  - Estocásticos

# Desenvolvimento de Modelos

- **Modelagem envolve**

- arte e imaginação
- talento e criatividade
- *know-how* técnico

- **Etapas na construção de modelos**

- 1 Estudar e caracterizar a situação de decisão
- 2 Formular e selecionar uma representação da situação
- 3 Construir e analisar o modelo simbólico
- 4 Quantificar e subsidiar o modelo com dados
- 5 Validar e testar modelo  $\times$  realidade

# Exemplo: Modelo Otimização

**Exemplo1)** Uma empresa de aço emite para a atmosfera três tipos de poluentes: Partículas ; óxido sulfúrico; hidrocarbonetos

A produção de aço inclui duas fontes principais de contaminação:

- os *altos-fornos* para produzir o *ferro-gusa* (ferro de primeira fundição ainda não purificado)
- os *fornos abertos* para converter o ferro em aço

De acordo com decisões governamentais a fábrica tem de **reduzir anualmente** a emissão dos poluentes como a tabela abaixo:

poluente	Redução requerida no nível anual de emissão (em milhares de toneladas)
A: Partículas	60
B: Óxido sulfúrico	150
C: Hidrocarbonetos	125

# Exemplo: Modelo Otimização

Para reduzir a emissão os engenheiros propõem as seguintes medidas:

- Aumentar a altura das chaminés
- A utilização de filtros nas chaminés
- Incluir certos aditivos nos combustíveis

Cada medida tem associado os seguintes *custos anuais* na sua implementação em milhares de reais:

Método de redução	Altos fornos	Fornos abertos
Chaminés mais altas	8	10
Filtros	7	6
Melhores combustíveis	11	9
		15

# Exemplo: Modelo Otimização

Com as medidas propostas vai ser possível eliminar as quantidades anuais dos poluentes A, B e C nas seguintes quantidades (em milhares de toneladas):

poluente	Chaminés mais altas		Filtros		Melhores combustíveis	
	Altos fornos	Fornos Abertos	Altos fornos	Fornos Abertos	Altos fornos	Fornos Abertos
Partículas	12	9	25	20	17	13
Óxido sulfúrico	35	42	18	31	56	49
Hidrocarbonetos	37	53	28	34	29	20

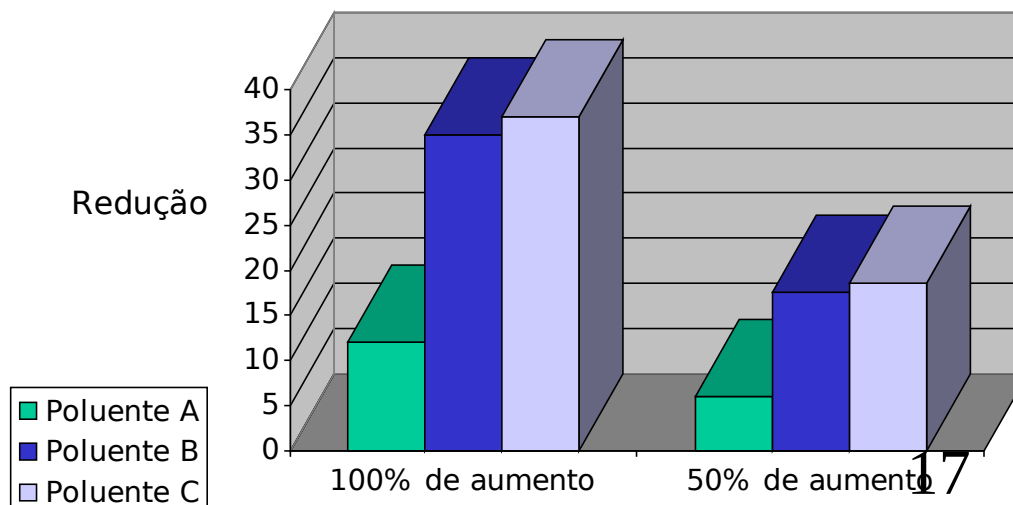
Estas medidas podem ser implementadas na sua *totalidade* ou *parcialmente*.



# Exemplo: Modelo Otimização

Por exemplo, se implementar na totalidade a medida 1 (em 100%) conseguir-se-á reduzir a emissão dos poluentes A, B e C em 12, 35 e 37 milhares de toneladas, respectivamente. Caso contrário, se implementar esta medida parcialmente (só a um 50% do previsto), apenas se reduzirá a emissão em 6, 17.5 e 18.5 milhares de toneladas.

Aumento na altura das chaminés nos altos-fornos



# Exemplo: Modelo Otimização

**O problema pode ser formulado como segue:**

Determinar um plano ótimo que, aplicando as medidas expostas (total ou parcialmente) nos fornos emissores, consiga ao menor custo o índice de maior redução da contaminação.

# Formular Objetivos:

Determinar um plano de ação para reduzir a contaminação, ou seja determinar quais e em que proporção serão aplicadas as diferentes medidas para reduzir a emissão dos contaminantes com o menor custo. Os custos destas medidas devem ser minimizados.

# Formular Restrições:

As reduções na emissão dos contaminantes, provocadas pela aplicação total ou parcial das medidas tem de ser superior ou igual aos dados que correspondem à redução exigida pelogoverno.

# 1º. Definir as variáveis de decisão:

Definir 6 variáveis de decisão:  $x_j$  ( $j=1,2,\dots,6$ ) que representam as percentagens de implementação destas medidas para cada um dos fornos emissores.

Método de redução	Altos fornos	Fornos abertos
<b>Chaminés mais altas</b>	$x_1$	$x_2$
<b>Filtros</b>	$x_3$	$x_4$
<b>Melhores combustíveis</b>	$x_5$	$x_6$

## 2º. Definir a função objetivo:

Como o objetivo é minimizar o custo total na aplicação das medidas de redução, calculamos o custo total  $Z$  como:

$$\textit{minimizar } Z = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 11x_5 + 9x_6 ,$$

*em milhões*

### 3º. Definir as restrições de redução da emissão:

*poluente A:*

$$12x_1 + 9x_2 + 25x_3 + 20x_4 + 17x_5 + 13x_6 \geq 60$$

*poluente B:*

$$35x_1 + 42x_2 + 18x_3 + 31x_4 + 56x_5 + 49x_6 \geq 150$$

*poluente C:*

$$37x_1 + 53x_2 + 28x_3 + 24x_4 + 29x_5 + 20x_6 \geq 125$$

## 4º. Definir as restrições tecnológicas:

As medidas podem ser implementadas na sua totalidade ou parcialmente, o que significa que as *variáveis de decisão*  $x_j$  têm de ter um valor menor ou igual do que a unidade, ou seja:

$$x_j \leq 1, \text{ para } j=1,2,\dots,6$$



## 5º. Definir as restrições de não negatividade:

Uma medida pode não ser implementada num dos fornos, ou se é implementada, então o valor da *variável de decisão*  $x_j$  correspondente tem de ser positivo, ou seja podemos definir as seguintes restrições:

$$x_j \geq 0, \text{ para } j=1,2,\dots, 6$$

# Modelo Matemático

$$\text{Minimizar } Z = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 11x_5 + 9x_6,$$

*sujeito a*

$$12x_1 + 9x_2 + 25x_3 + 20x_4 + 17x_5 + 13x_6 \geq 60$$

$$35x_1 + 42x_2 + 18x_3 + 31x_4 + 56x_5 + 49x_6 \geq 150$$

$$37x_1 + 53x_2 + 28x_3 + 24x_4 + 29x_5 + 20x_6 \geq 125$$

$$x_j \leq 1, \text{ para } j=1,2,\dots, 6$$

$$x_j \geq 0, \text{ para } j=1,2,\dots, 6$$

# Resolução

Uma vez formulado o problema como um modelo de Programação Linear a equipe de PO conseguiu determinar o seguinte plano ótimo:

## Medidas a aplicar

Método de redução	Altos fornos	Fornos abertos
Chaminés mais altas	$x_1 = 1$ (aumentar a altura na sua totalidade, i.e. aplicar a medida em 100%)	$x_2 = 0.623$ (aumentar só 62.3 % da altura prevista)
Filtros	$x_3 = 0.343$ (utilizar os filtros só em 34.3%)	$x_4 = 1$ (utilizar os filtros na sua totalidade, i.e. aplicar a medida em 100%)
Melhores combustíveis	$x_5 = 0.048$ (melhorar os combustíveis em 4,8% do previsto)	$x_6 = 1$ (melhorar os combustíveis em 100%)

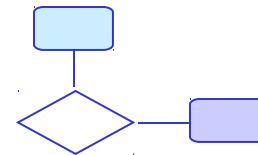
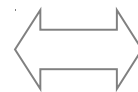
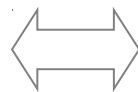
# Conclusão

- Uma vez encontrada a solução ótima a equipe de PO efetuou a sua avaliação para verificar se realmente esta cumpria com os objetivos propostos. Como a avaliação foi satisfatória, de imediato elaborou-se uma metodologia para a implementação das medidas.
- Com a implementação da solução encontrada pela equipe de PO foi possível reduzir a emissão dos contaminantes na atmosfera e cumprir com as decisões governamentais ao menor custo possível.

# Modelagem e Dados

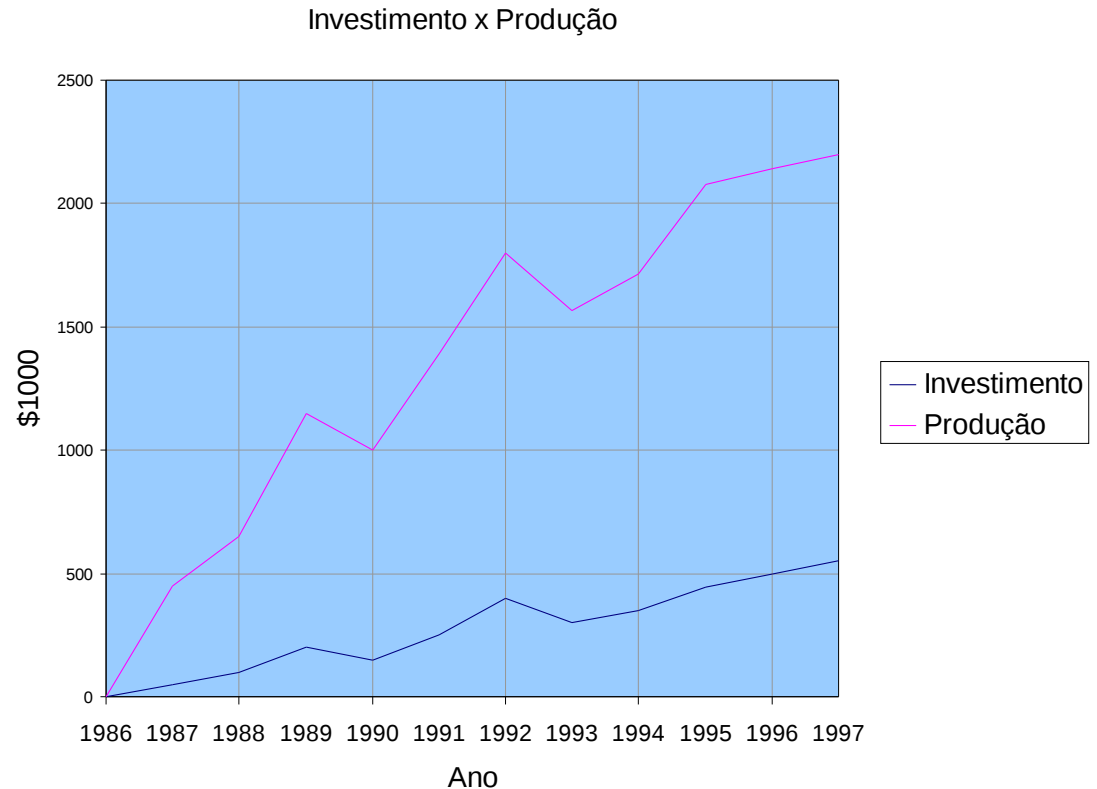
- Decisões envolvem avaliação e interpretação de dados
- Dados são interpretados em um contexto e vice-versa
- Existência de dados potencializa o uso de modelos
- Aquisição de dados envolve esforço, atenção e *custo*
- Aquisição de dados requer disponibilidade, precisão e relevância
- Modelos simbólicos permitem avaliar e interpretar dados de forma sistemática e consistente
- Modelos simbólicos podem ser usados para gerar dados
- Dados são usados para construir e validar modelos

$\min f(x)$   
 $s.a. x \in S$



# Modelagem com Dados

Ano	Investimento \$1000	Produção (\$1000)
1986	0	0
1987	50	450
1988	100	650
1989	200	1150
1990	150	1000
1991	250	1390
1992	400	1800
1993	300	1565
1994	350	1715
1995	445	2080
1996	500	2140
1997	550	2200



- Inúmeros modelos são possíveis: estáticos, dinâmicos, etc.
- Modelo apropriado depende de fatores associados ao ambiente
- Produção proporcional ao investimento. Qual é o fator de proporcionalidade?
- Desempenho depende só do investimento no ano corrente? Dos anteriores?
- Outros fatores relevantes ?Economia, marketing, política operação, governo ?



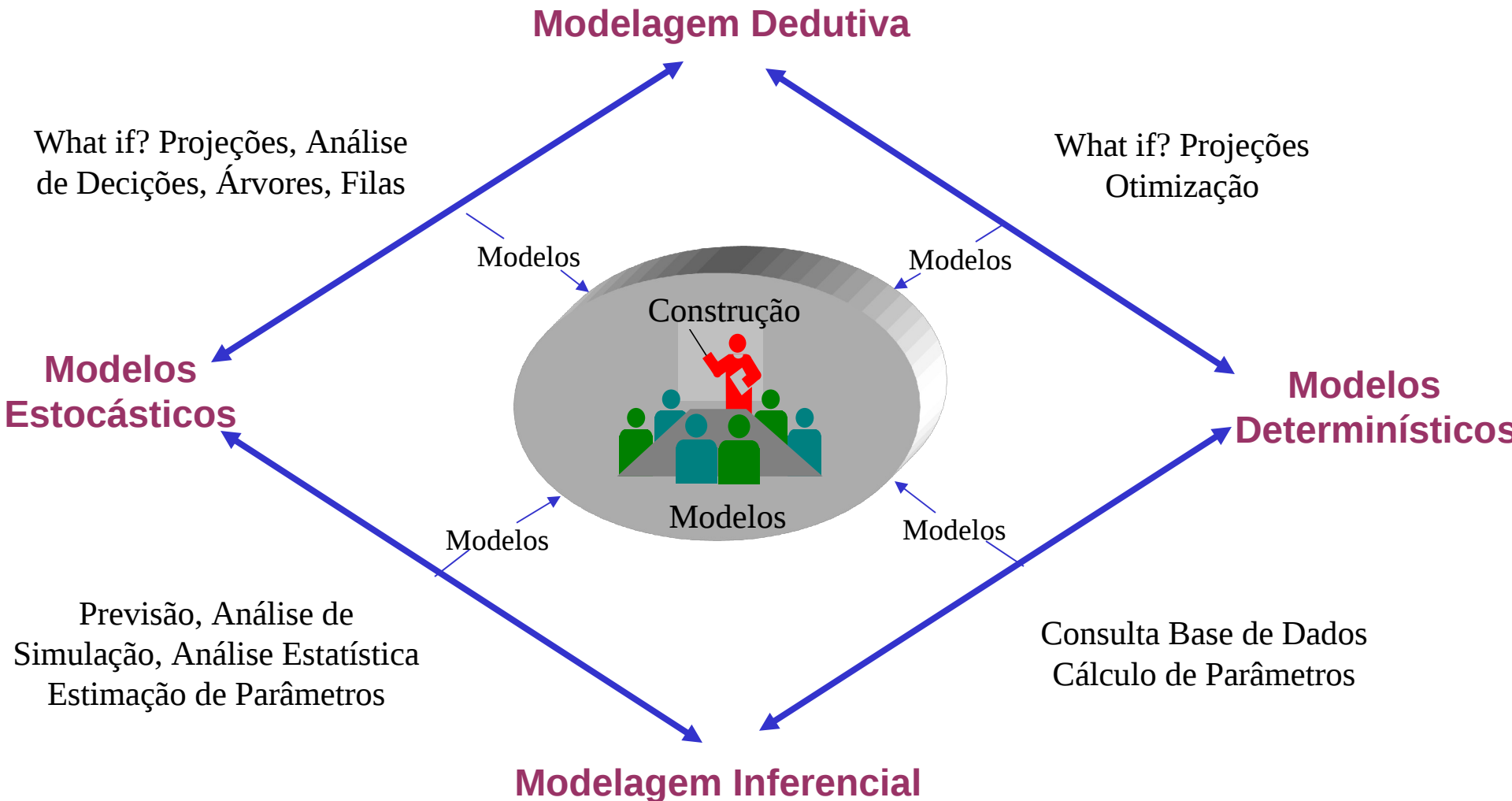
- Dados, absolutamente falando, não é um modelo
- Modelos emergem quando encontramos relações entre os dados
- Modelos refletem interpretações dos dados via relações/distribuições
- Modelo é uma representação seletiva da realidade!

# Formas e Fontes de Dados

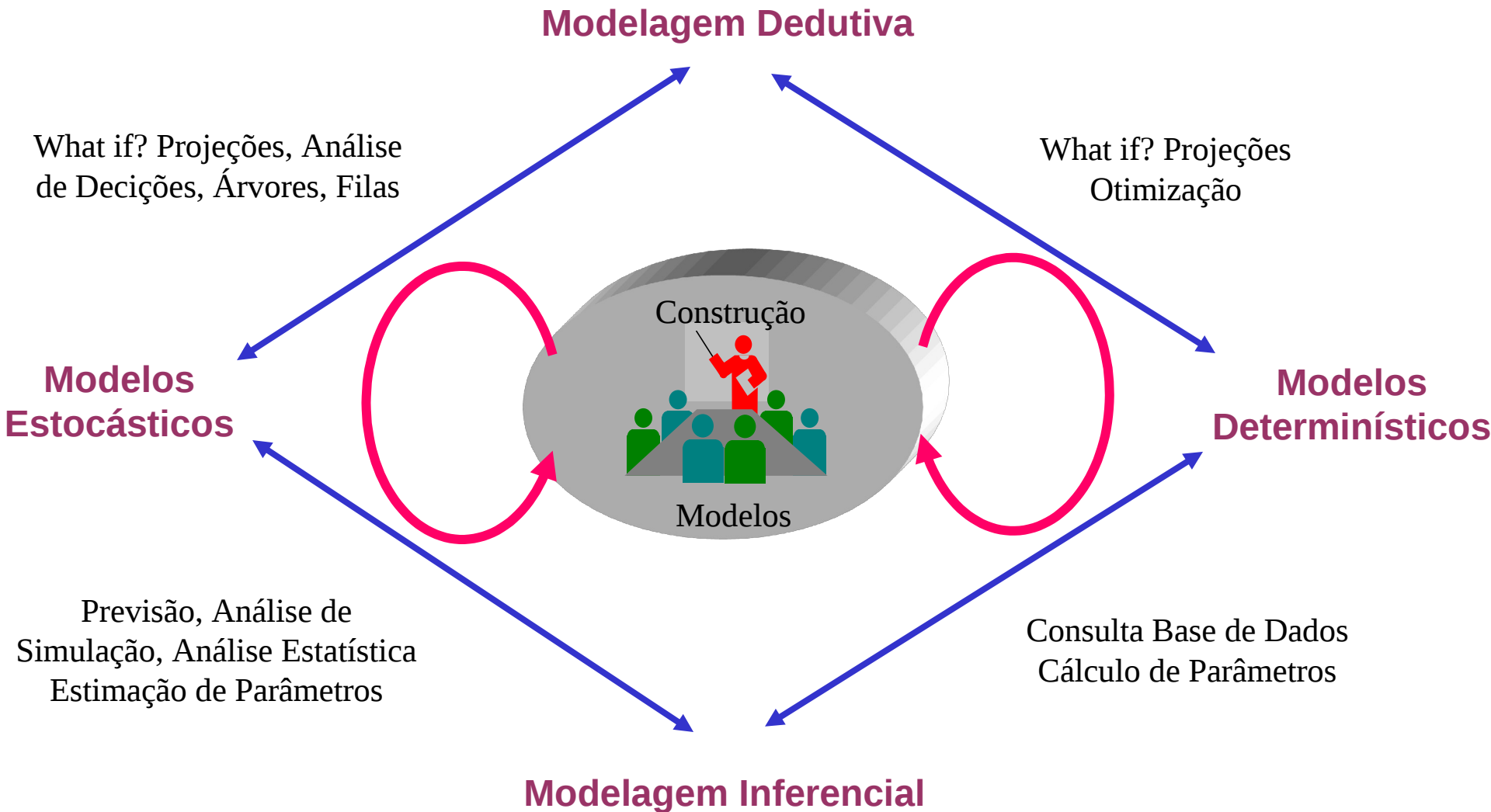
- Decisão de como coletar, armazenar, interpretar depende do uso dados
  - Unidades dos dados
  - Agregação de dados
  - Refinamento de dados
  - Incertezas
- 
- Dados podem ser originados de arquivos e memórias do passado
  - Dados adquiridos pela observação direta ou estimativas no presente
  - Produzidos por modelos quando fornecidas as entradas
  - Realizando previsões sobre o futuro



# Construção de Modelos



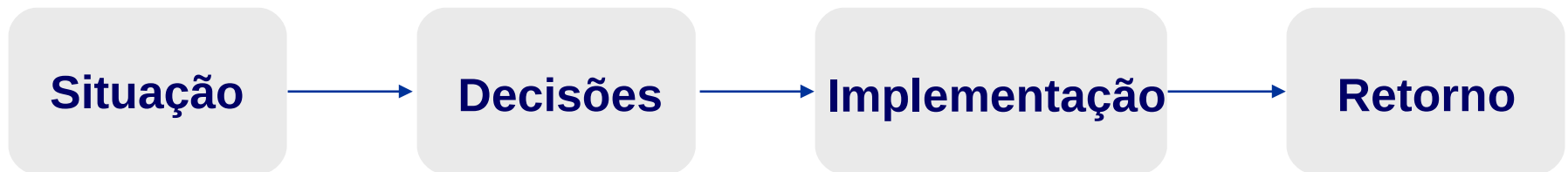
# Ciclos na Construção de Modelos



# Modelagem e Decisão

- **Aplicação de modelos em decisão**

- Formulação do Modelo: situação → abstração → modelo simbólico
- Validação do modelo: realidade × abstração
- Análise do modelo para gerar resultados: decisões
- Interpretação e validação dos resultados: **informação disponível × realidade**
- Implementação: conhecimento → funcionar na prática



# Validação de Modelos

- **Predição da história**
  - Dados históricos sobre situações similares
    - decisões, parâmetros, resultados
    - comparação entre dados e resultados
    - análise das similaridades e diferenças
- **Julgamento de valor**
- **Bom senso, intuição, experiência**