Tópicos em Otimização

Método Simplex

Parte desses slides foram retirados do material disponível na página do Prof. Marcone Souza - UFOP
http://www.decom.ufop.br/prof/marcone/Disciplinas/Pesquisa%20Operacional%20I/Pesquisa_Operacional_I.htm

Definições

- $A=[B\ N]$;

B_{mxm} = matriz básica; $N_{m\ x\ n-m}$ = matriz não básica

- x_B = vetor das variáveis básicas
- x_N = vetor das variáveis não-básicas
- Solução Básica (SB) = vetor x tal que

$$Bx_B = b \text{ e } x_N = 0$$

- Solução Básica Viável (SBV) = vetor x tal que

$$Bx_B=b;\ \ x_B \geq 0 \ \text{ e } \ x_N = 0$$

- Solução Básica Viável Degenerada (SBVD) = SBV em que existe variável básica nula.

Algoritmo Simplex: Resumo

Passo 0: {Inicialização} Colocar o problema no formato padrão

Passo 1 : {Calcular solução básica factível} $\hat{x}_B = B^{-1}b$, (equiv. $B\hat{x}_B = b$)
$\hat{x}_N = 0$,

Passo 2 {Cálculo dos custos relativos – Determina variável que entra na Base}
2.1 Vetor multiplicador simplex: $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$ (eq. $B^T\lambda = c_B$)
2.2 Cálculo dos custos relativos $\hat{c}_{Nj} = c_{Nj} - \lambda^T a_{Nj}$, $j \neq 1, 2, n-m$
2.3 Variável que entra na base $\hat{c}_{Nk} = \min(\hat{c}_{Nj}, j = 1, 2, \ldots n-m)$

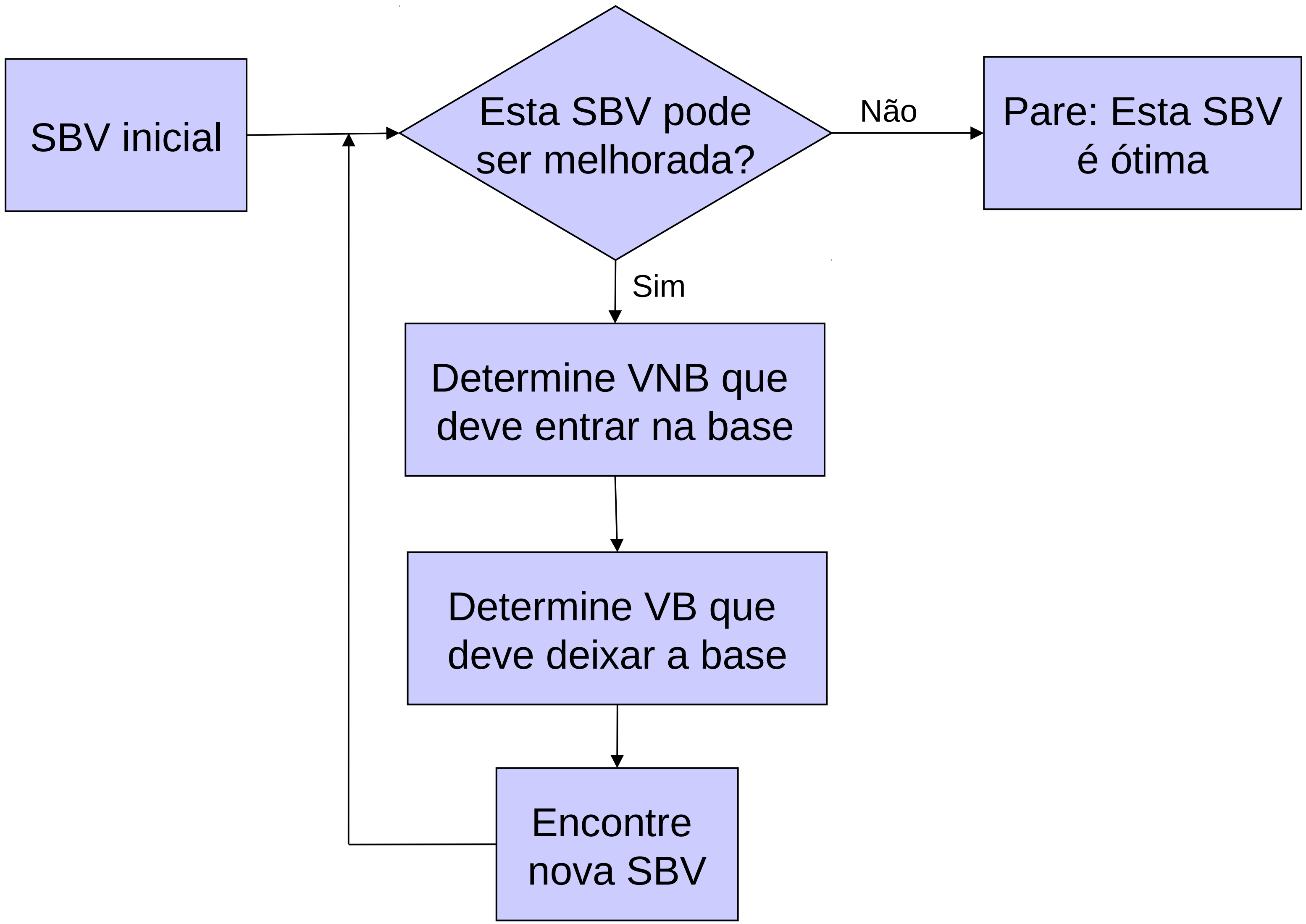
Passo 3 {Teste deOtimalidade} se $\hat{c}_{Nk} \geq 0$ então pare: solução ótima

Passo 4 { Cálculo da direção simplex} $y = B^{-1}a_{Nk}$ (equiv. $By = a_{Nk}$)

Passo 5: {Determinação do passo e variável a sair da base}
se $y_i \leq 0$ então pare (solução ótima ilimitada: f(x) = - infinito)
senão determinar a variável que deixa a base, $\varepsilon = x_{Br}/y_R$: $\min\{ x_{Bi}/ y_{i,}, \ yi \geq 0 \}$;

Passo 6: {Atualização: nova partição básica}
troque R-ésima coluna de B pela k-ésima coluna de N
iteração = iteração +1 ; Retorne ao passo 1

Funcionamento do método SIMPLEX



Exemplo Ilustrativo: Algoritmo simplex (em tabelas)

- Passo 0: Colocar problema no formato padrão:

$$
\begin{array}{lccccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & = & z \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{lccccccccccc}
\min & -x_1 & - & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & = & f \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{b}
$$

- Determine uma tabela simplex inicial
  - matriz dos coeficientes contém I_{mxm} e $b \geq 0$
  - fç objetivo escrita em termos de VNB   ($f=-x_1-2x_2$)

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	1	0	1	0	0	2
x_4	0	1	0	1	0	2
x_5	1	1	0	0	1	3
f	-1	-2	0	0	0	

B= I (identidade)

VB = $\{x_3 = 2, x_4 = 2, x_5 = 3\}$

VNB = $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$

Solução inicial:

$x^{(0)} = (0\ 0\ 2\ 2\ 3)^t$; $f = 0$

- Determine a nova SBV
  - determine o menor dos custos relativos
  - se ck ≥0 solução ótima. Senão variável xk entra na base
  - se aik ≤ 0 não existe solução ótima finita. Senão determine variável a sair da base calculando $\min\{b_i/a_{ik}, a_{ik} > 0\}$
  - Atualize a tabela simplex: x_k passa a ser variável básica.

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
(L_1)	x_3	1	0	1	0	0	2
(L_2)	x_4	0	1	0	1	0	2
(L_3)	x_5	1	1	0	0	1	3
(L_4)		-1	-2	0	0	0	f

Transformações elementares:

$L_3 \leftarrow -L_2 + L_3$

$L_4 \leftarrow 2L_2 + L_4$

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(L_1)	x_3	1	0	1	0	0	2
(L_2)	x_2	0	1	0	1	0	2
(L_3)	x_5	1	0	0	-1	1	1
(L_4)		-1	0	0	2	0	f+4

VB = $\{x_3 = 2, x_2 = 2, x_5 = 1\}$

VNB = $\{x_1 = 0, x_4 = 0\}$

Final da Iteração 1:

$x^{(1)} = (0\ 2\ 2\ 0\ 1)^t$;

$f+4=-x_1+2x_4$

$F=-4-x_1+2x_4=-4$

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
(L_1)	x_3	1	0	1	0	0	2
(L_2)	x_2	0	1	0	1	0	2
(L_3)	x_5	1	0	0	-1	1	1
(L_4)		-1	0	0	2	0	f+4

$L_1 \leftarrow -L_3 + L_1$ $\quad$ $L_4 \leftarrow L_3 + L_4$

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(L_1)	x_3	0	0	1	1	-1	1
(L_2)	x_2	0	1	0	1	0	2
(L_3)	x_1	1	0	0	-1	1	1
(L_4)		0	0	0	1	1	f+5

VB = $\{x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1\}$

VNB = $\{x_4 = 0, x_5 = 0\}$

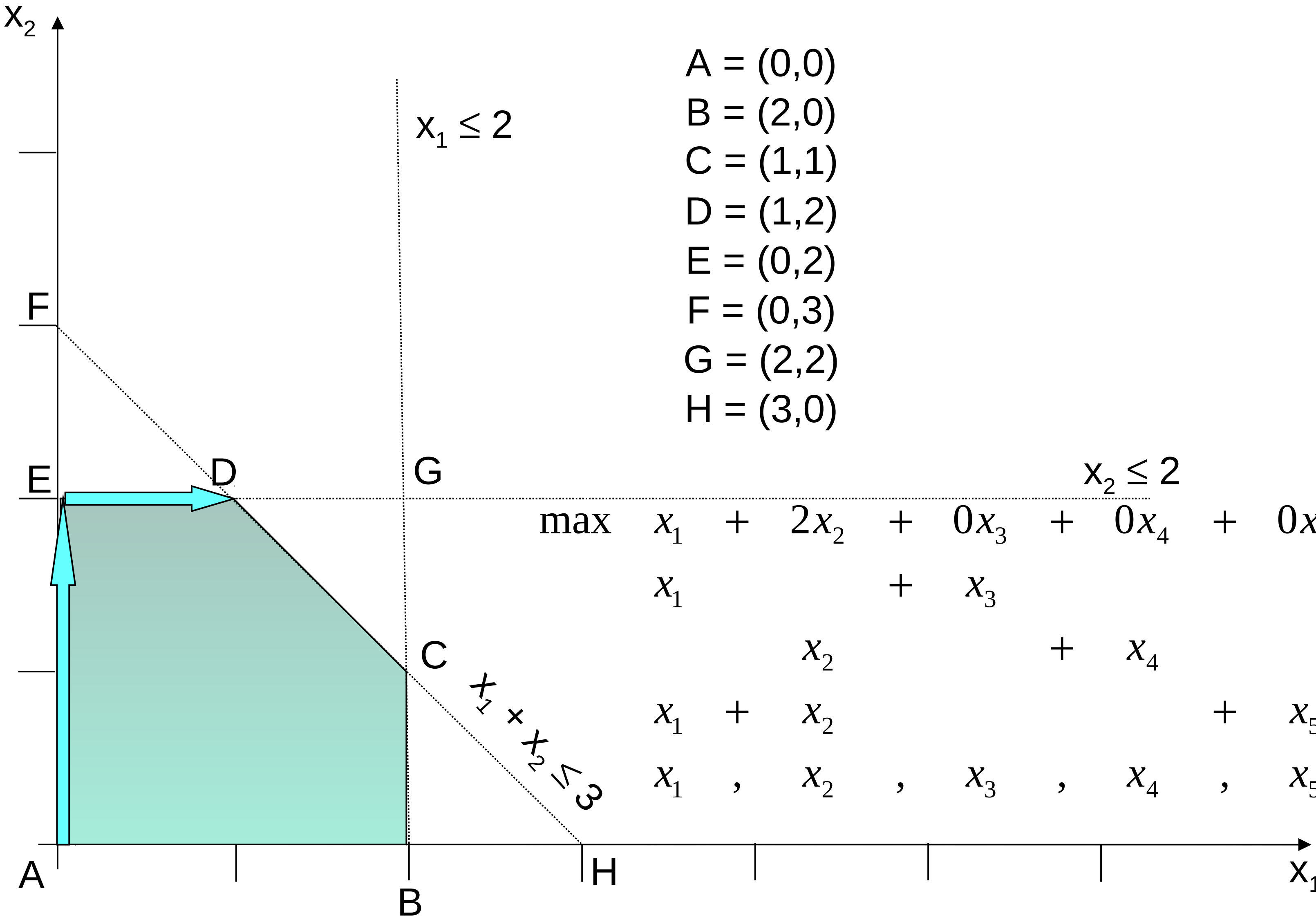
Final da Iteração 2:

$x^{(2)} = (1\ 2\ 1\ 0\ 0)^t$

$f+5=x_4+x_5$

$f= -5+x_4+x_5$

Interpretação geométrica



A = (0,0)
B = (2,0)
C = (1,1)
D = (1,2)
E = (0,2)
F = (0,3)
G = (2,2)
H = (3,0)

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & & \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Situação em que a origem não pode ser solução inicial:

- escolher ao acaso m colunas linearmente independentes para formar B, calcular x_B e verificar se é factível?

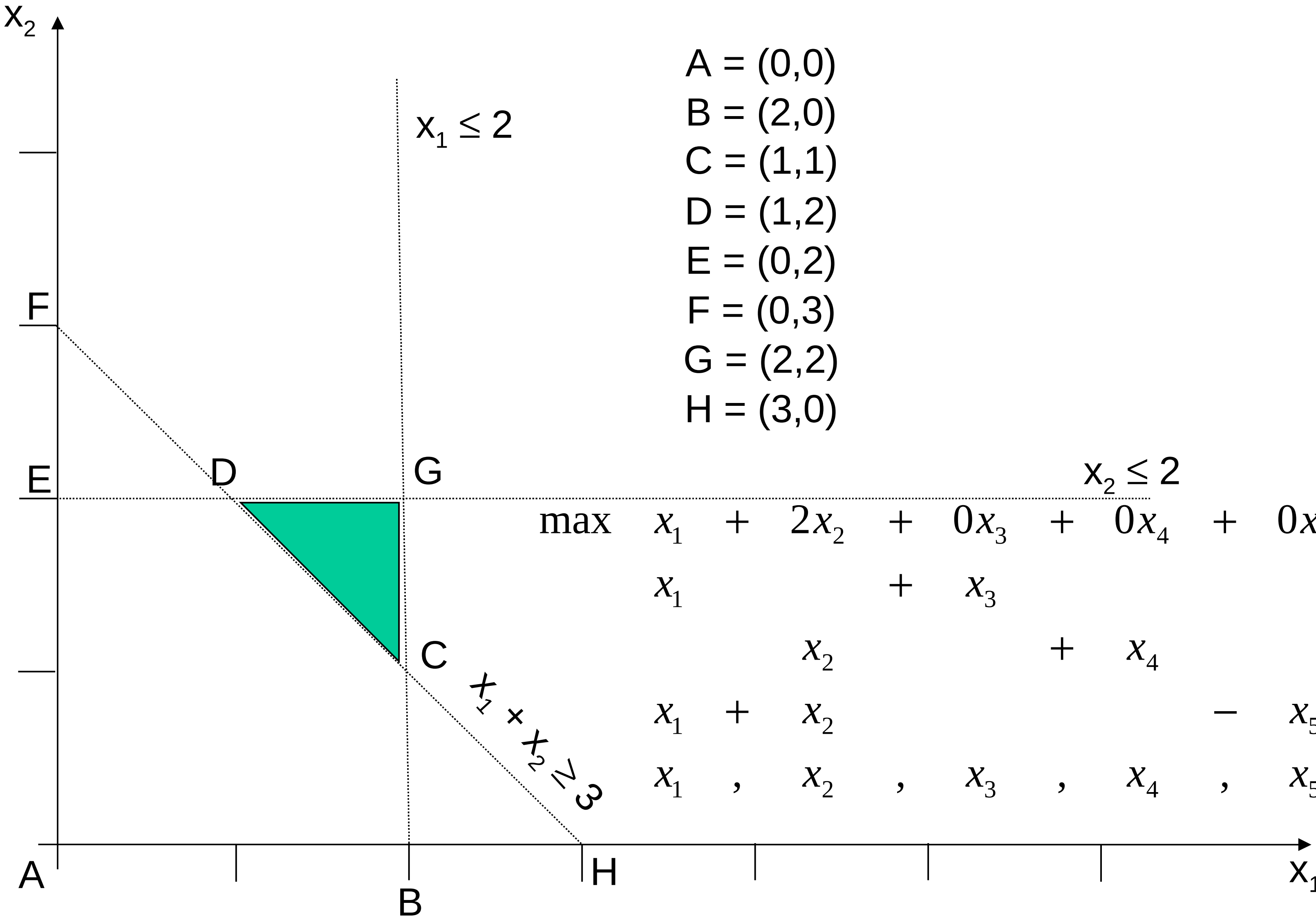
n=20 m=10 tem-se 20!/(10!(20-10)!) =184756

computacionalmente inviável.

$$\begin{array}{lccccc} \max & x_1 & + & 2x_2 & = & f \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{lccccccccccccc} \min & -x_1 & - & 2x_2 & - & 0x_3 & - & 0x_4 & - & 0x_5 & = & f \\ & x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 2 \\ & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & = & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{b}$$

Método das Duas Fases



A = (0,0)
B = (2,0)
C = (1,1)
D = (1,2)
E = (0,2)
F = (0,3)
G = (2,2)
H = (3,0)

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & & \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Método das Duas Fases

- Primeira fase (Criar problema auxiliar P'):
  - Introduzir variáveis de folga e variáveis artificiais
  - Variáveis de folga: introduzidas quando há variáveis do tipo $\leq$ ou $\geq$
  - Variáveis artificiais: introduzidas quando há restrições do tipo $\geq$ ou $=$
  - Criar função objetivo artificial:

$$f^a = \sum_i x_i^a \quad \forall i$$

  - Variáveis básicas iniciais: variáveis de folga associadas às restrições $\leq$ e variáveis artificiais
  - Objetivo da primeira fase: minimizar a função objetivo artificial
  - Caminhar de SBV em SBV de P' até alcançar SBV do problema original P (situação que ocorre quando todas as variáveis artificiais são nulas).

Método das Duas Fases

- Segunda fase:
  - A partir de uma SBV do problema original P, gerar SBV cada vez melhores até se atingir a solução ótima.

Aplicando o método das duas fases ao PPL dado:

$$\min \quad 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_1^a = f^a$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\min & -x_1 & - & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 0x_1^a & = & f \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & & & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & + & x_1^a & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_1^a & \geq & 0
\end{array}$$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	
(L_1)	x_3	1	0	1	0	0	0	2
(L_2)	x_4	0	1	0	1	0	0	2
(L_3)	x_1^a	1	1	0	0	-1	1	3
(L_4)		0	0	0	0	0	1	f^a
(L_5)		-1	-2	0	0	0	0	f

Redução à forma canônica: $L_4 \leftarrow -L_3 + L_4$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	
(L_1)	x_3	1	0	1	0	0	0	2
(L_2)	x_4	0	1	0	1	0	0	2
(L_3)	x_1^a	1	1	0	0	-1	1	3
(L_4)		-1	-1	0	0	1	0	$f^a - 3$
(L_5)		-1	-2	0	0	0	0	f

$L_3 \leftarrow -L_1 + L_3$ $\qquad$ $L_4 \leftarrow L_1 + L_4$ $\qquad$ $L_5 \leftarrow L_1 + L_5$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	
(L_1)	x_1	1	0	1	0	0	0	2
(L_2)	x_4	0	1	0	1	0	0	2
(L_3)	x_1^a	0	1	-1	0	-1	1	1
(L_4)		0	-1	1	0	1	0	$f^a - 1$
(L_5)		0	-2	1	0	0	0	$f + 2$

$L_2 \leftarrow -L_3 + L_2$ $\quad$ $L_4 \leftarrow L_3 + L_4$ $\quad$ $L_5 \leftarrow 2L_3 + L_5$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	
(L_1)	x_1	1	0	1	0	0	0	2
(L_2)	x_4	0	0	1	1	1	-1	1
(L_3)	x_2	0	1	-1	0	-1	1	1
(L_4)		0	0	0	0	0	1	f^a
(L_5)		0	0	-1	0	-2	2	f+4

Fim da primeira fase: $z^a = 0$

$x = (2, 1)$; $f = -4$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(L_1)	x_1	1	0	1	0	0	2
(L_2)	x_4	0	0	1	1	1	1
(L_3)	x_2	0	1	-1	0	-1	1
(L_4)		0	0	-1	0	-2	f+4

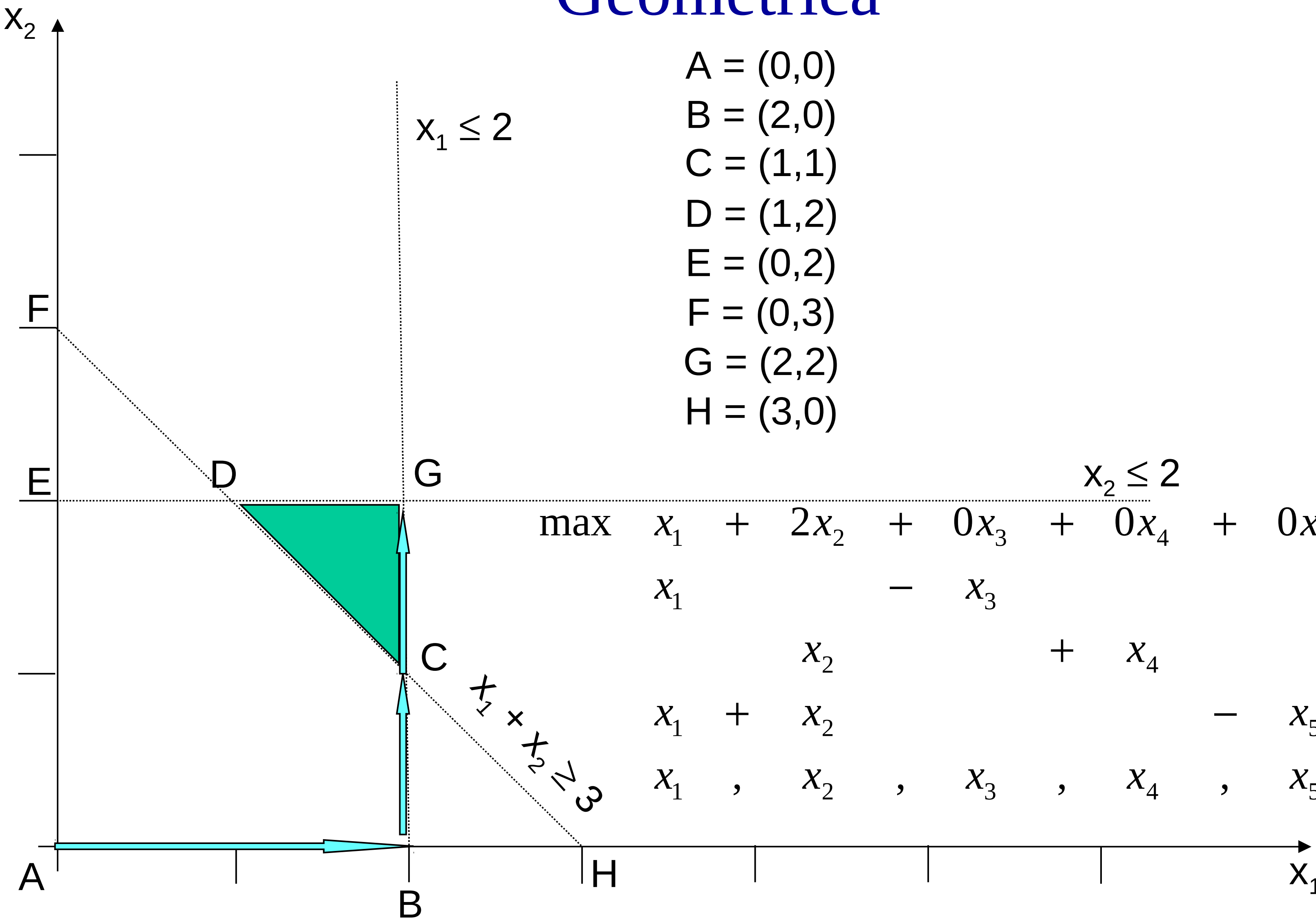
$L_3 \leftarrow L_2 + L_3$ $L_4 \leftarrow 2L_2 + L_4$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(L_1)	x_1	1	0	1	0	0	2
(L_2)	x_5	0	0	1	1	1	1
(L_3)	x_2	0	1	0	1	0	2
(L_4)		0	0	1	2	0	f+6

Solução ótima: $x^* = (2,2)$; $f^* = 6$

Método das Duas Fases: Interpretação Geométrica



A = (0,0)
B = (2,0)
C = (1,1)
D = (1,2)
E = (0,2)
F = (0,3)
G = (2,2)
H = (3,0)

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & & \\
 & x_1 & & & - & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \ge & 0
\end{array}
$$

Outro exemplo de aplicação do Método das Duas Fases:
Exemplo 3

$$\begin{array}{lccccccc} \max & x_1 & + & 2x_2 & = & z \\ & x_1 & & & \geq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lccccccccccccc} \min & -x_1 & - & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & = & f \\ & x_1 & & & - & x_3 & & & & & = & 2 \\ & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & = & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{b}$$

Método das Duas Fases: Exemplo 3

- Introduzindo variáveis artificiais no PPL dado, tem-se:

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
\min & 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 1x_1^a & + & 1x_2^a & = & f^a \\
\min & -x_1 & - & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 0x_1^a & + & 0x_2^a & = & f \\
 & x_1 & & & - & x_3 & & & & & + & x_1^a & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & & & & & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & & & + & x_2^a & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_1^a & , & x_2^a & \geq & 0
\end{array}
$$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	
(L_1)	x_1^a	1	0	-1	0	0	1	0	2
(L_2)	x_4	0	1	0	1	0	0	0	2
(L_3)	x_2^a	1	1	0	0	-1	0	1	3
(L_4)		0	0	0	0	0	1	1	f^a
(L_5)		-1	-2	0	0	0	0	0	f

Transf. para forma canônica: $L_4 \leftarrow -L_1 - L_3 + L_4$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	
(L_1)	x_1^a	1	0	-1	0	0	1	0	2
(L_2)	x_4	0	1	0	1	0	0	0	2
(L_3)	x_2^a	1	1	0	0	-1	0	1	3
(L_4)		-2	-1	1	0	1	0	0	f^a -5
(L_5)		-1	-2	0	0	0	0	0	f

$L_3 \leftarrow -L_1 + L_3$ $L_4 \leftarrow 2L_1 + L_4$ $L_5 \leftarrow L_1 + L_5$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	
(L_1)	x_1	1	0	-1	0	0	1	0	2
(L_2)	x_4	0	1	0	1	0	0	0	2
(L_3)	x_2^a	0	1	1	0	-1	-1	1	1
(L_4)		0	-1	-1	0	1	2	0	$f^a - 1$
(L_5)		0	-2	-1	0	0	1	0	$f + 2$

$L_2 \leftarrow -L_3 + L_2$ $\quad$ $L_4 \leftarrow L_3 + L_4$ $\quad$ $L_5 \leftarrow 2L_3 + L_5$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	
(L_1)	x_1	1	0	-1	0	0	1	0	2
(L_2)	x_4	0	0	-1	1	1	1	-1	1
(L_3)	x_2	0	1	1	0	-1	-1	1	1
(L_4)		0	0	0	0	0	1	1	f^a
(L_5)		0	0	1	0	-2	-1	2	$f+4$

Fim da primeira fase: $f^a = 0$ $\quad$ $x = (2, 1)$; $f = -4$

Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(L_1)	x_1	1	0	-1	0	0	2
(L_2)	x_4	0	0	-1	1	1	1
(L_3)	x_2	0	1	1	0	-1	1
(L_4)		0	0	1	0	-2	f+4

$L_3 \leftarrow L_2 + L_3$ $L_4 \leftarrow 2L_2 + L_4$

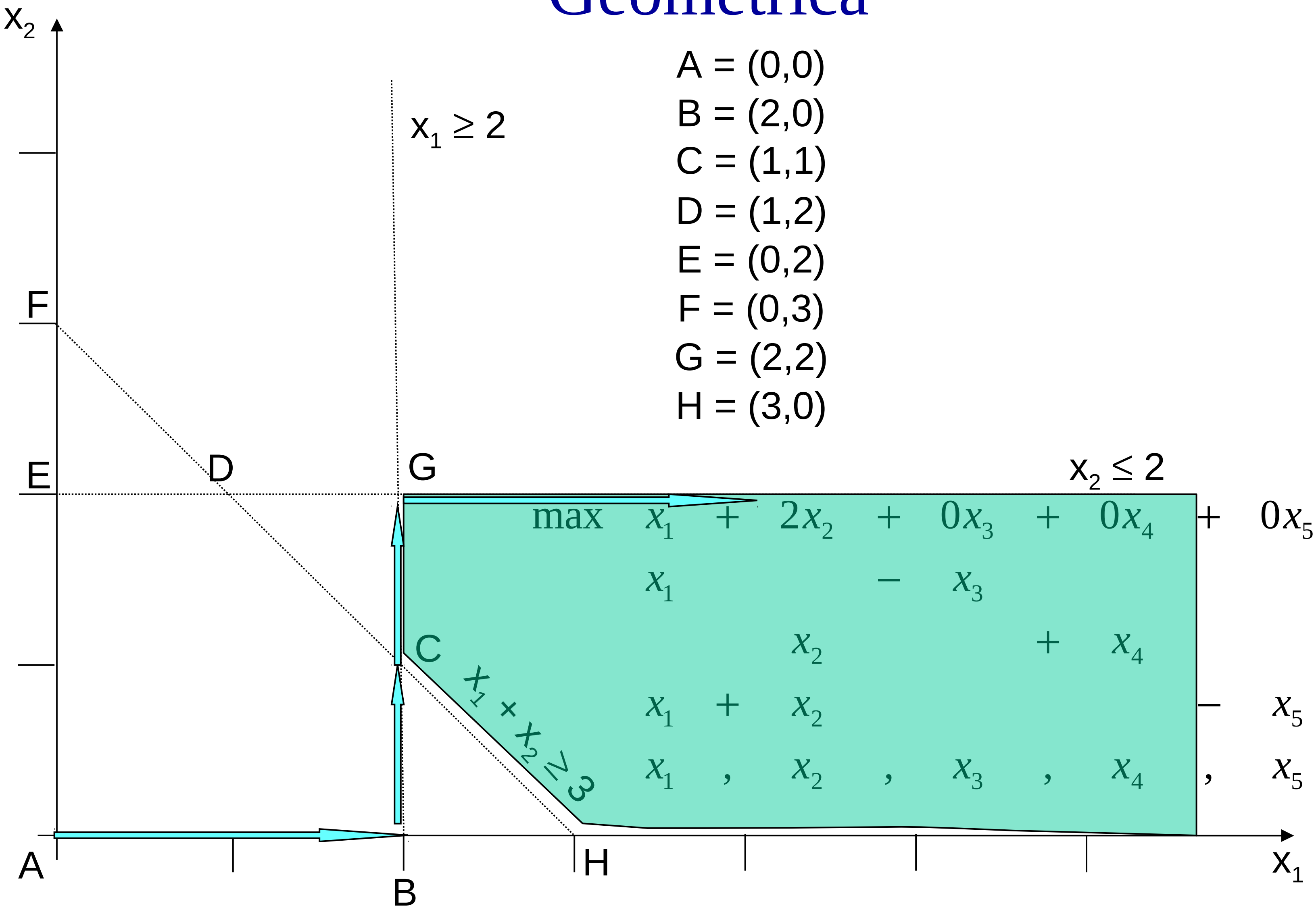
Método das Duas Fases

	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(L_1)	x_1	1	0	-1	0	0	2
(L_2)	x_5	0	0	-1	1	1	1
(L_3)	x_2	0	1	0	1	0	2
(L_4)		0	0	-1	2	0	$f+6$

x_3 pode entrar na base melhorando o valor de f indefinidamente. Assim, não há solução ótima finita.

Método das Duas Fases: Interpretação Geométrica

A = (0,0)
B = (2,0)
C = (1,1)
D = (1,2)
E = (0,2)
F = (0,3)
G = (2,2)
H = (3,0)



$$
\begin{array}{lllllllll}
\max & x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & & \\
& x_1 & & & - & x_3 & & & & & = & 2 \\
& & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\
& x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & = & 3 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$