Tópicos em Otimização

Otimização Linear
Definições e Propriedades Básicas

Parte desses slides foram disponibilizados pelo Prof. Fernando Gomide-UNICAMP. O material original pode ser encontrado em
http://www.dca.fee.unicamp.br/~gomide/courses/EA044/transp/index.html

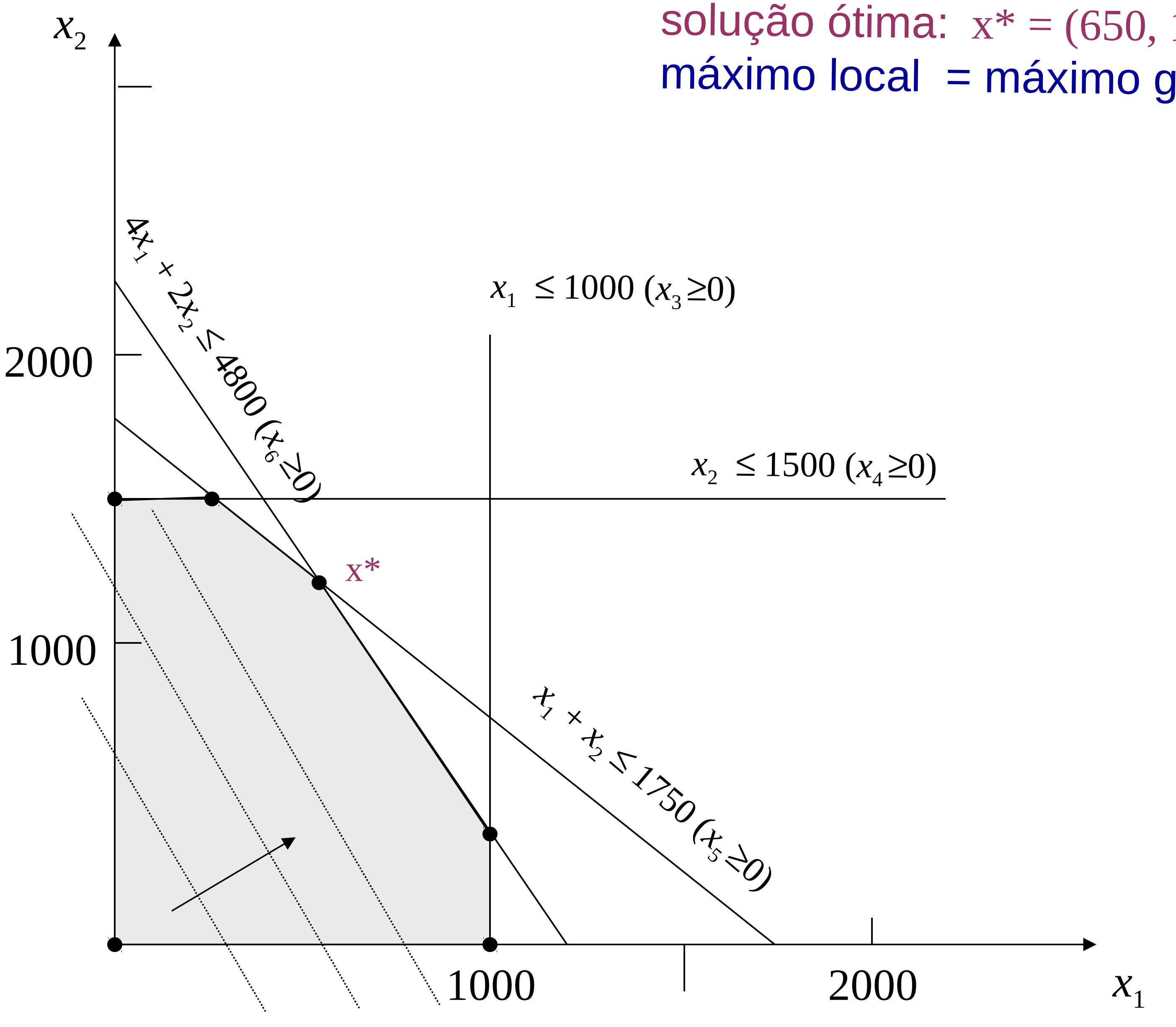
Solução Ótima

$$
\begin{aligned}
\max\ & 12x_1 + 9x_2 \\
s.a.\ & x_1 \le 1000 \\
& x_2 \le 1500 \\
& x_1 + x_2 \le 1750 \\
& 4x_1 + 2x_2 \le 4800 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max\ & 12x_1 + 9x_2 \\
s.a.\ & x_1 + x_3 = 1000 \\
& x_2 + x_4 = 1500 \\
& x_1 + x_2 + x_5 = 1750 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_6 = 4800 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0
\end{aligned}
$$

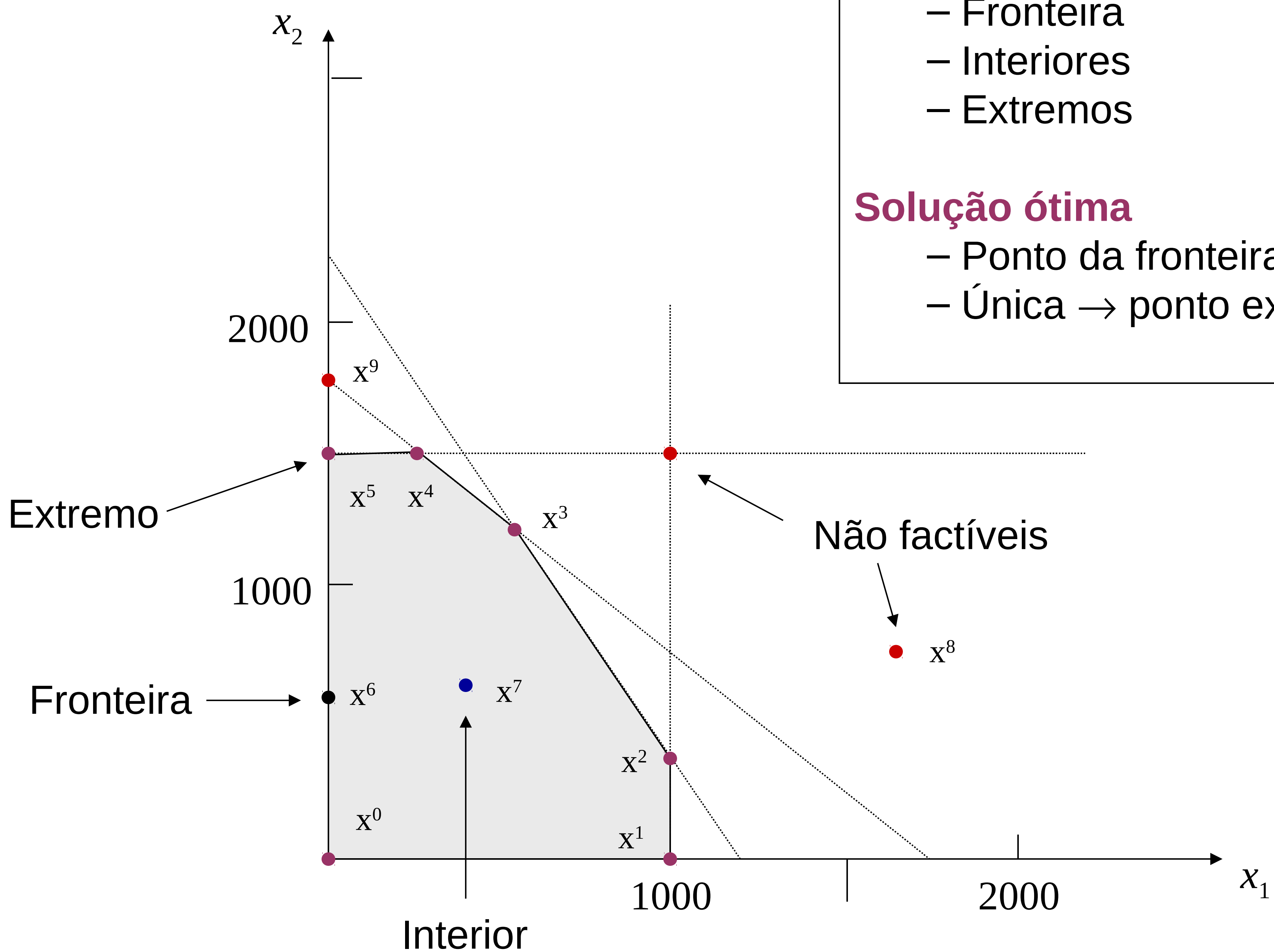
x_3, x_4, x_5, x_6 : **variáveis de folga** solução ótima: $x^* = (650, 1100)$

máximo local = máximo global



Soluções factíveis
- Fronteira
- Interiores
- Extremos

Solução ótima
- Ponto da fronteira
- Única $\rightarrow$ ponto extremo



Soluções Básicas

$$\max \; 12x_1 + 9x_2$$

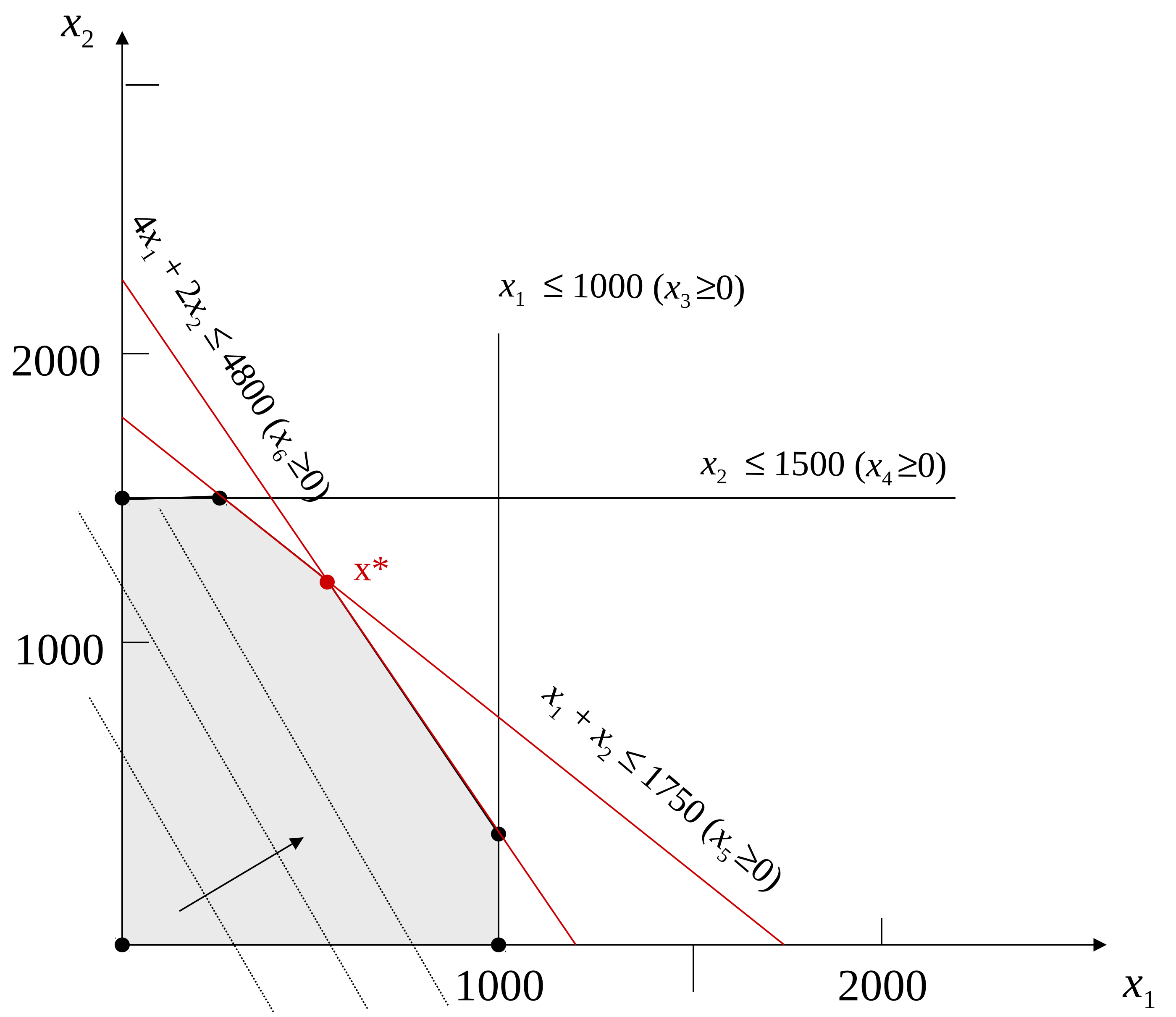
$$\begin{aligned}
s.a. \quad & x_1 + x_3 = 1000 \\
& x_2 + x_4 = 1500 \\
& x_1 + x_2 + x_5 = 1750 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_6 = 4800 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_1 + x_3 = 1000 \\
& x_2 + x_4 = 1500 \\
& x_1 + x_2 + 0 = 1750 \\
& 4x_1 + 2x_2 + 0 = 4800
\end{aligned}$$

$$x_1 = 650,\; x_2 = 1100,\; x_3 = 350,\; x_4 = 400$$

Não básicas

Básicas


x2
2000
1000
4x1 + 2x2 ≤ 4800 (x6 ≥0)
x1 ≤ 1000 (x3 ≥0)
x2 ≤ 1500 (x4 ≥0)
x*
x1 + x2 ≤ 1750 (x5 ≥0)
1000
2000
x1

Existência de Soluções Básicas

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad + x_3 \quad\quad\quad &= 1000 \\ x_2 \quad\quad + x_4 \quad &= 1500 \\ x_1 + x_2 \quad\quad + 0 \quad &= 1750 \\ 4x_1 + 2x_2 \quad\quad + 0 &= 4800 \end{aligned}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

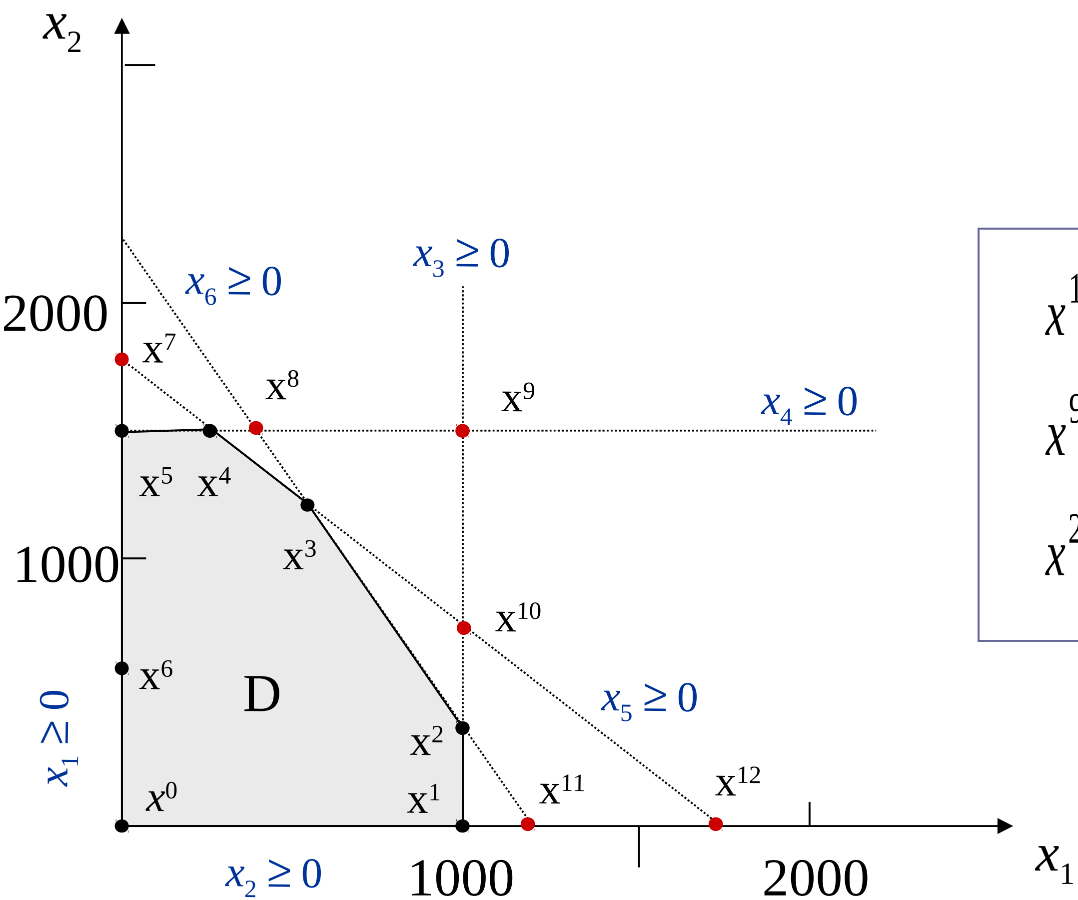
$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad + x_3 \quad\quad\quad &= 1000 \\ 0 \quad\quad + 0 \quad\quad &= 1500 \\ x_1 + 0 \quad\quad + x_5 \quad &= 1750 \\ 4x_1 + 0 \quad\quad + x_6 &= 4800 \end{aligned}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Solução básica existe se e somente se as colunas das restrições de de igualdade correspondentes às m variáveis básicas são linearmente independentes (formam uma base)(solução não degenerada).

- Solução básica factível: solução básica não negativa

- Solução básica factível: pontos extremos de D



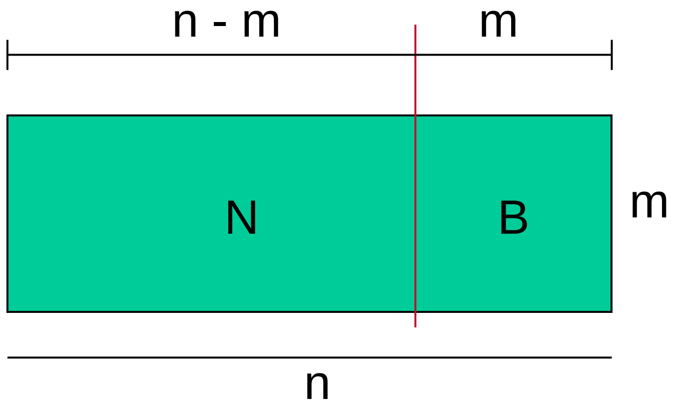
$$x^{11} = (1200,\ 0,\ -200,\ 1500,\ 550,\ 0)$$

$$x^{9} = (1000,\ 1500,\ 0,\ 0,\ -750,\ -2200)$$

$$x^{2} = (1000,\ 400,\ 0,\ 1100,\ 350,\ 0)$$

Caracterização de vértice

- Em um ponto no interior do conjunto (não pertencente a nenhuma aresta) não há variáveis nulas.
- Em uma aresta há, pelo menos, uma variável nula.
- Em um vértice há, pelo menos, n-m variáveis nulas



Caracterização de vértice

- Para gerar um vértice:
  - Escolher uma matriz não-singular B tal que:

$$Bx_B + Nx_N = b$$

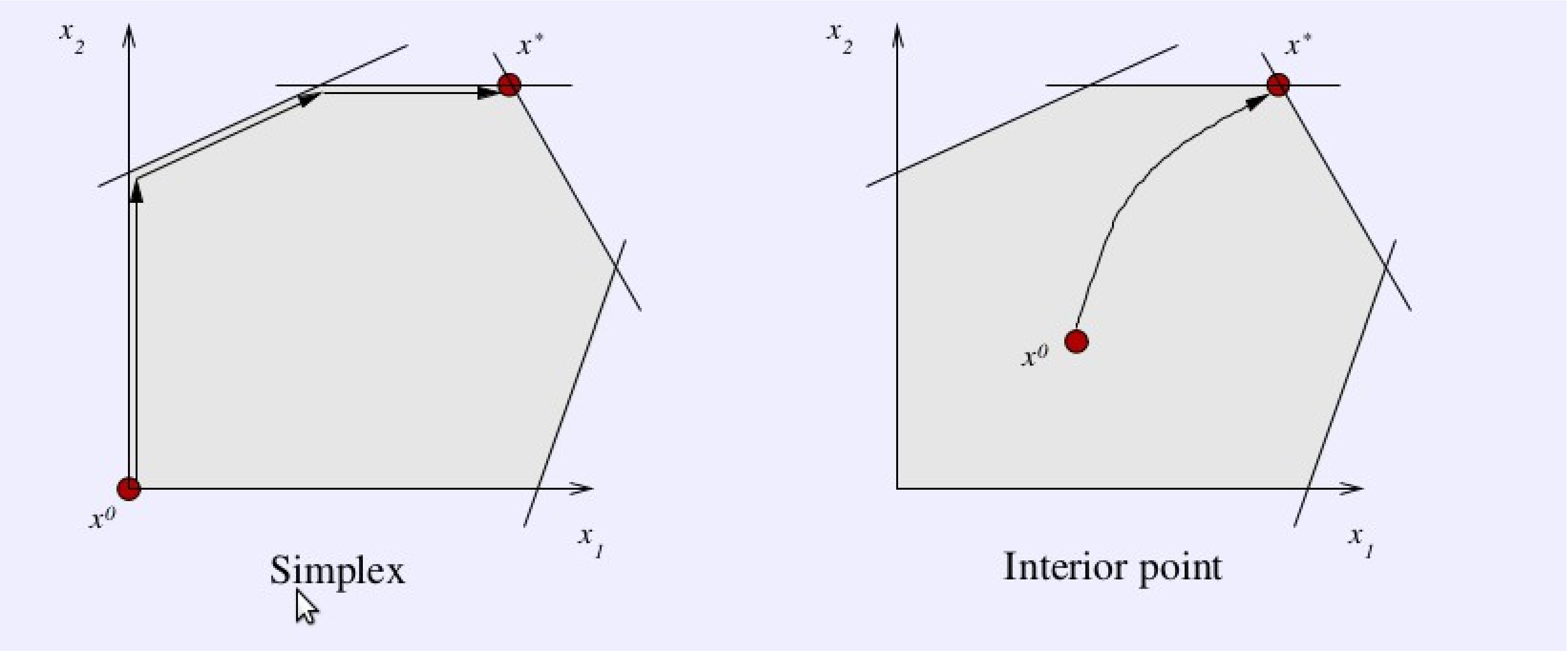
  - Fazer $x_N = 0$
  - Se ao resolver o sistema $Bx_B = b$, for obtido $x_B \geq 0$, então $x = (x_B\ x_N)^T = (x_B\ 0)^T$ é vértice
- Deste procedimento resulta uma **Solução Básica Viável (SBV)**, com o significado geométrico de **vértice**.

Número de Vértices

- Há um número finito de vértices, pois é finito o número de partições básicas

$$n^o \text{ máximo de bases} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Método Simplex x Método de Pontos Interiores



Algoritmos e Complexidade

Na prática o método simplex apresenta bom desempenho mas no pior caso, pode apresentar complexidade exponencial.

V.Klee e O.J. Minty (1977) exibiram uma classe de problemas em que o algoritmo simplex gasta 2^n-1 iterações.

Método de Pontos Interiores

Classe de algoritmos polinomiais para resolver problemas de PL (programação linear) , PQ (programação quadrática), programação convexa em geral.

Popular- 1984 – Karmarkar, AT&T Bell Labs;

- algoritmo polinomial para Programação Linear

- 50 vezes mais rápido que método simplex em problemas de grande porte.

- algoritmo primal-dual consagrado como o mais eficiente (softwares comerciais CPLEX, XPRESS,...)

Algoritmos e Complexidade

Em geral, o número de iterações necessário para convergência em métodos de pontos interiores não depende do tamanho do problema. No entanto, em termos de complexidade teórica o algoritmo converge em $\mathcal{O}(\sqrt{n}\ln(1/\varepsilon))$ iterações, sendo epsilon a precisão requerida.