ESTATÍSTICA EXPLORATÓRIA

Prof Paulo Renato A. Firmino

praf62@gmail.com

Aulas 25-26

Teste de hipóteses: Passos

- Passos para a construção de um teste genérico

1. Fixe H_0 e H_1
   - Determinar H_0 como a hipótese que se deseja refutar
     - H_0 sempre envolverá uma igualdade
   - A rejeição de H_0 levará à aceitação da hipótese alternativa H_1
2. Escolha o **parâmetro** e o respectivo **estimador** a ser usado para testar H_0
   - Obtenha a distribuição amostral do estimador
     - Seus parâmetros serão fixados em H_0
3. Fixe α e construa a **regra de decisão**, em forma de uma **região crítica**
   - Uma região crítica é uma **região de rejeição** de H_0
4. Calcule a **estimativa** do estimador proveniente da amostra aleatória
   - Deve-se buscar uma amostra **representativa** da população
5. Se a estimativa pertencer à região crítica, rejeite H_0
   - Caso contrário, não há porquê rejeitar H_0

Teste de hipóteses: Exemplo 1

Um economista defende que sua política (denominada Y) é mais eficiente que a tradicionalmente adotada para superação da linha de pobreza por famílias

- **Passo 1**: Identificando H_0 e H_1
  - Não se tem informação sobre a eficiência de Y
    - A hipótese nula seria então $\mathbf{H_0 \equiv}$ **Y é tão eficiente quanto outras políticas**
      - Para que se prove o contrário

Teste de hipóteses: Passo 2

- Passos para a construção de um teste genérico
- Escolha do parâmetro e estimador a serem usados para testar H_0
  - Trabalharemos com
    - a **média**
    - e a **proporção** amostrais
  - para inferirmos, respectivamente, sobre
    - a **média**,
    - e a **proporção** populacionais

Teste de hipóteses: Exemplo 1

- **Passo 2**: Escolha do parâmetro e respectivo estimador

  - Um bom parâmetro para estudarmos a eficiência da política é o **tempo médio** que esta consome para levar uma família a superar a linha da pobreza

  - O estimador associado é, então, a **média amostral**

  - Trata-se de um **teste de hipóteses sobre a média**

Teste de hipóteses: Exemplo 1

- **Concluindo o Passo 1**: Especificação das hipóteses
  - Suponhamos que o tempo médio até a superação da linha da pobreza via política tradicional seja μ_0
  - De acordo com H_0 (passo 1),
    - O tempo médio requerido pela política Y não seria menor que μ_0
      - Seria, no melhor dos casos, equivalente
  - Logo, concretizando o **Passo 1**,
    - Testa-se $\mathbf{H_0: \mu=\mu_0}$ **contra** $\mathbf{H_1: \mu<\mu_0}$
      - Veja que H_1 retrata o que se deseja estudar

Teste de hipóteses (sobre a média com variância conhecida)

- **Passo 2**: Distribuição da média amostral

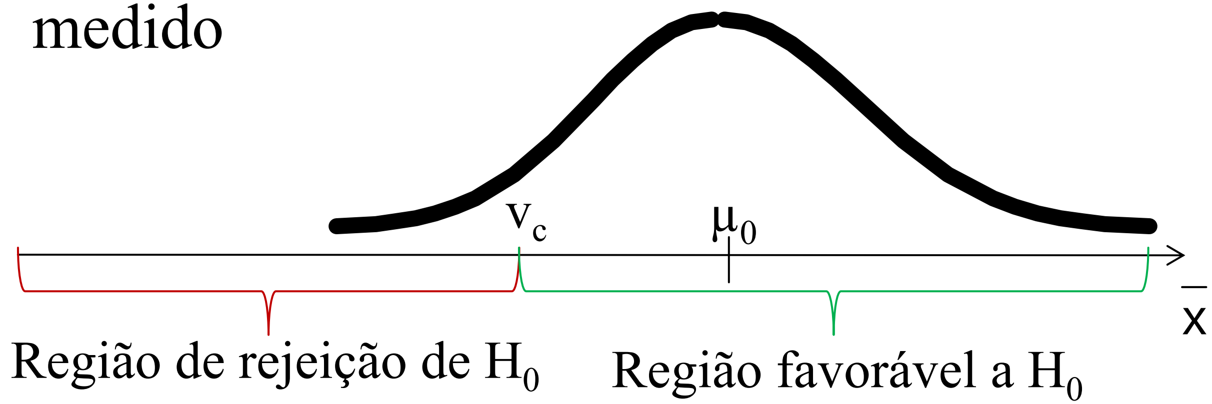
$$\left(\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \right)$$

  - X_i são variáveis aleatórias independentes
    - Com média $E(X_i) = \mu$
    - Com variância **conhecida** $V(X_i) = \sigma^2$
  - Quanto à média amostral,
    - Média $E(\overline{X}) = \mu_{\overline{X}} = \mu$
    - Variância $V(\overline{X}) = \sigma^2_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma^2}{n}$
  - Devido a **σ^2 ser conhecido**, supõe-se que a média amostral se distribui normalmente (TCL),

$$\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2_{\overline{X}})$$

Teste de hipóteses: Exemplo 1 (teste sobre a média)

- **Passo 3**: Construção da regra de decisão
  - A regra é baseada em H_1 (no caso, $H_1: \mu<\mu_0$)
    - Determina-se um valor mínimo, v_c, para a média amostral segundo α
      - » Valores da média amostral diferentes de μ_0, porém maiores que v_c são considerados perturbações naturais, não refutando H_0
    - Amostra-se aleatoriamente n famílias assistidas pela nova política e o tempo decorrido até a superação da linha da pobreza é medido

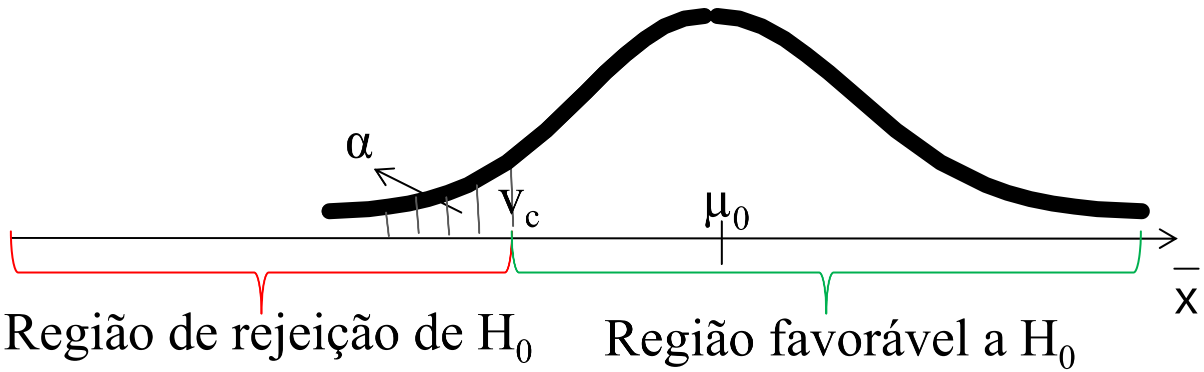


Teste de hipóteses para a média (variância conhecida)

- **Passo 3**: Construção da regra de decisão
  - Em outros termos, do exemplo 1:

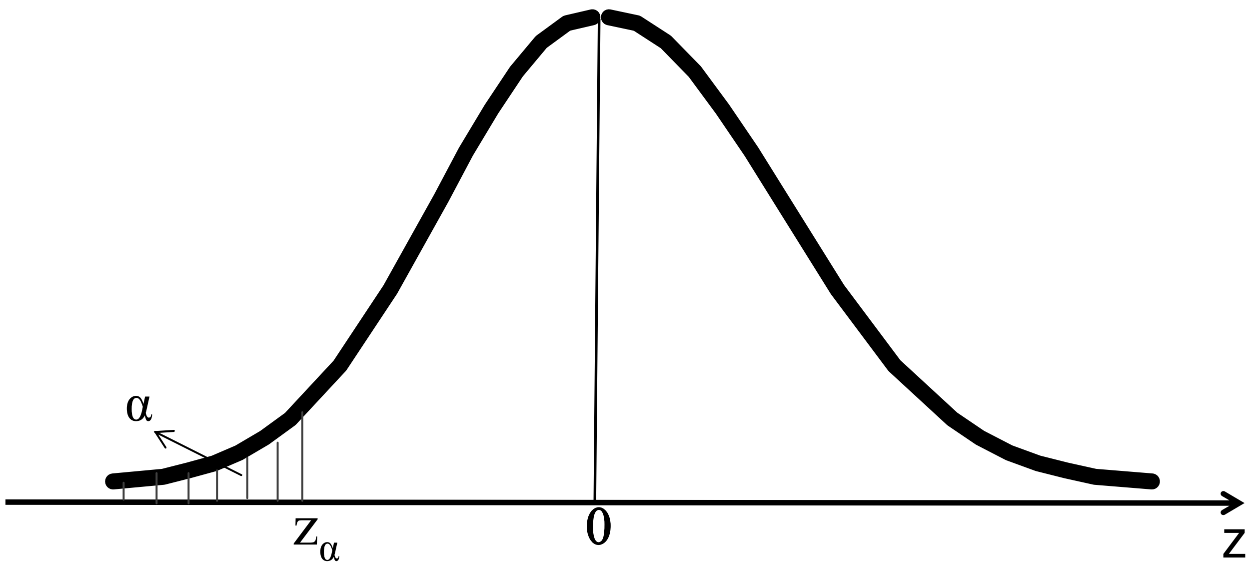
$$\alpha = P(\text{rej}\, H_0 \mid H_0 \text{ é verdade}) = P\left(\overline{X} < v_c \mid \mu = \mu_0\right) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} < \frac{v_c - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} \middle| \mu = \mu_0\right)$$

  - Fazendo $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}$, Z~N(0, 1)
  - Temos, assim, $\alpha = P\left(Z < \dfrac{v_c - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} \middle| \mu = \mu_0\right)$



Teste de hipóteses para a média (variância conhecida)

- **Passo 3**: Construção da regra de decisão
  - Em outros termos, do exemplo 1:
  - Denotando por z_α o valor que acumula abaixo dele $100 \cdot \alpha\%$ de área sob a curva Normal padrão,



$$z_\alpha = \frac{v_c - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} \therefore$$

$$v_c = \mu_{\bar{X}} + z_\alpha \cdot \sigma_{\bar{X}}$$

Teste de hipóteses para a média (variância conhecida)

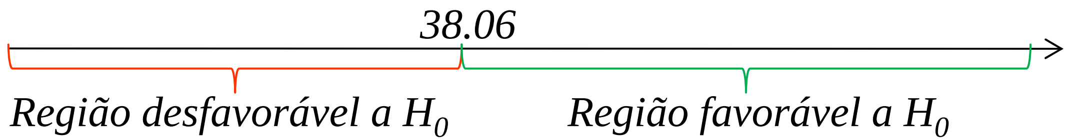
- **Passo 3**: Construção da regra de decisão
  - Retornando ao problema inicial

    $\alpha = P(\text{rej } H_0 \mid H_0 \text{ é verdade}) = P\left(\overline{X} < v_c \mid \mu = \mu_0\right)$

    onde $v_c = \mu_{\overline{X}} + z_\alpha \cdot \sigma_{\overline{X}}$, sendo $\mu_{\overline{X}} = \mu_0, \sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ e

    z_α o valor que acumula abaixo dele 100·α% de área sob a curva Normal padrão
  - A **regra de decisão** é: Se a amostra apresentar uma média menor que v_c, rejeita-se H_0: $\mu=\mu_0$ em favor de H_1: $\mu<\mu_0$
    - Caso contrário, não há porquê rejeitar H_0
    - Considerando $n=36$, $\mu_0=40$ meses, $\sigma^2 = 25$ meses^2 e $\alpha = 0.01$ ($z_\alpha = -2.33$),

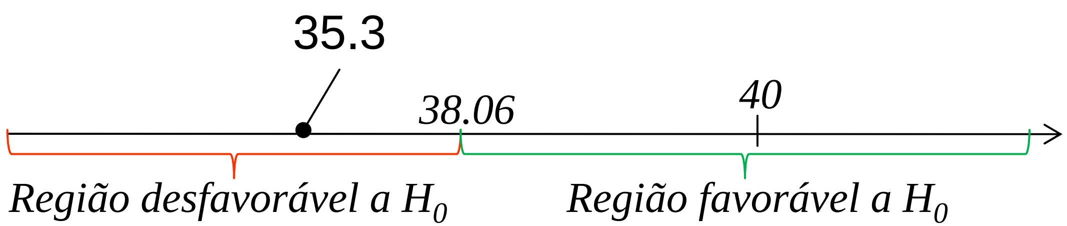
      $v_c = 40 - 2.33 \cdot 5/6 =$ **38.06 meses**



Teste de hipóteses para a média (variância conhecida)

Passo 4: Amostra aleatória com n observações

- No exemplo 1,
  - Uma amostra com n=36 replicações da nova política resultou em um tempo médio até a superação da linha da pobreza de 35.3 meses
- **Passo 5**: Como a média da amostra (35.3 meses) foi menor que v_c (38.06 meses), rejeitamos H_0
  - Concluímos que a nova política realmente é mais eficiente que a tradicional
    - – A probabilidade de estarmos errados é de α=1%



Exercício

1. Argumenta-se que devido a uma nova tecnologia adotada, a produção média diária de leite de dado rebanho será maior que 10 litros. Sabe-se que a variabilidade na produção de leite do rebanho resulta em um desvio-padrão de 3 litros. Uma amostra aleatória de 25 ocasiões onde o desempenho da nova tecnologia foi medido, levou a uma média de produção de 13 litros de leite. O que você concluiria sob um nível de significância de 5%? E sob um nível de significância de 1%?
2. Defende-se que determinada dieta reduz a resistência de cavalos. Sabe-se que, em média, um cavalo é capaz de percorrer até 12 km sem apresentar sinais de fadiga, sob um desvio-padrão de 3 km. Uma amostra aleatória com 16 cavalos submetidos à tal dieta resultou em uma resistência média de 10.5 km. O que você concluiria a um nível de significância de 5.5%? E sob um nível de significância de 2.5%?

Exercício

3. Uma equipe de manutenção suspeita que dado equipamento de medição não esteja calibrado. Para uma determinada condição, sua medida deve ser de, em média, 35 unidades, sob um desvio-padrão de 3 unidades. Montou-se uma amostra aleatória envolvendo 49 medições do equipamento e obteve-se o valor médio de 32 unidades. O que você concluiria a um nível de significância de 7%? E sob um nível de significância de 0.1%?
4. Para cada uma das questões acima, responda: (a) Em palavras, quais hipóteses estão sendo confrontadas? (b) Quais são os parâmetros utilizados para abordar o problema? Quais são os respectivos estimadores associados? (c) Como as hipóteses confrontadas podem ser matematicamente descritas a partir dos parâmetros utilizados? (d) Quais são as respectivas regras de decisão elaboradas? (e) Quais suposições embasam suas análises?