Álgebra Linear I

Prof. Christina Waga
Prof. Regina Freitas
Versão 12

ÍNDICE

MATRIZES

Definição	1
Igualdade	2
Matrizes Especiais	2
Operações com Matrizes	3
Classificação de Matrizes Quadradas	9
Operações Elementares	11
Matriz Equivalente por Linha	11
Matriz na Forma Escalonada	11
Aplicações de Operações Elementares	12
Exercícios	15
Respostas	18
Apêndice A – Determinante	19

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Definição	24
Matrizes Associadas a um Sistema Linear	24
Classificação de Sistemas	25
Resolução de Sistemas utilizando o Método de Eliminação Gaussiana	25
Resolvendo e Interpretando Geometricamente Sistemas Lineares no R^2	26
Resolvendo e Interpretando Geometricamente Sistemas Lineares no R^3	28
Sistema Homogêneo	37
Resolução de Sistemas utilizando Inversão de Matrizes	38
Exercícios	39
Respostas	40

ESPAÇO VETORIAL REAL DE DIMENSÃO FINITA

Definição	41
Subespaço Vetorial	42
Combinação Linear	43
Subespaço Vetorial Gerado e Conjunto Gerador	44
Vetores Linearmente Independentes e Dependentes	45
Base e Dimensão de um Espaço Vetorial	46
Operações com Subespaços Vetoriais	47
Coordenadas de um Vetor em relação a uma Base Ordenada	49
Matriz de Transição de uma Base para uma outra Base	50
Exercícios	51
Respostas	54
Apêndice B – Teoremas	55

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Transformação Linear	62
Operadores Lineares no Espaço Vetorial R^2	63
Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear	66
Transformação Linear Injetora	68
Transformação Linear Sobrejetora	68
Transformação Linear Bijetora – Isomorfismo	69
Matriz Associada a uma Transformação Linear	70
Operações com Transformações Lineares	72
Exercícios	73
Respostas	77
Apêndice C – Teoremas	78

BIBLIOGRAFIA 82

MATRIZES

Definição

Conjunto de números reais (ou complexos) dispostos em forma de tabela, isto é, distribuídos em m linhas e n colunas, sendo m e n números naturais não nulos.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notação: $A = (a_{ij})_{m \times n}$ com $i = 1,2,\dots,m$ e $j = 1,2,\dots,n$

a_{ij} - elemento genérico da matriz A

i - índice que representa a linha do elemento a_{ij}

j - índice que representa a coluna do elemento a_{ij}

$m \times n$ - ordem da matriz. Lê-se "m por n".

Representações: $A = (\ )$ $A = [\ ]$ $A = \|\ \|$

Exemplos:

1) A representação de um tabuleiro de xadrez pode ser feita por meio de uma matriz 8×8.

2) A matriz $A = (a_{ij})_{2\times 3}$ onde $a_{ij} = i^2 + j$ é $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

3) A matriz abaixo fornece (em milhas) as distâncias aéreas entre as cidades indicadas:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{cidade A} & \text{cidade B} & \text{cidade C} & \text{cidade D} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{cidade A} \\ \text{cidade B} \\ \text{cidade C} \\ \text{cidade D} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 638 & 1244 & 957 \\ 638 & 0 & 3572 & 2704 \\ 1244 & 3572 & 0 & 1036 \\ 957 & 2704 & 1036 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Esta é uma matriz 4×4 (quatro por quatro).

4) A matriz abaixo representa a produção (em unidades) de uma confecção de roupa feminina distribuída nas três lojas encarregadas da venda.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{shorts} & \text{blusas} & \text{saias} & \text{jeans} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{loja I} \\ \text{loja II} \\ \text{loja III} \end{array} & \begin{pmatrix} 50 & 80 & 25 & 40 \\ 70 & 100 & 0 & 60 \\ 30 & 120 & 70 & 25 \end{pmatrix} \end{array}$$

Esta é uma matriz 3×4 (três por quatro) pois seus elementos estão dispostos em 3 linhas e 4 colunas.

Igualdade

Duas matrizes de mesma ordem $A=(a_{ij})_{m\times n}$ e $B=(b_{ij})_{m\times n}$ são iguais quando $a_{ij}=b_{ij}$ para todo $i=1,2,...,m$ e para todo $j=1,2,...,n$.

Matrizes Especiais

1. Matriz **Linha**

Uma matriz A é denominada matriz linha quando possuir uma única linha.

Notação: $A=(a_{ij})_{1\times n}$

Exemplo: $\begin{pmatrix}-8 & 3 & 4\end{pmatrix}_{1\times 3}$

2. Matriz **Coluna**

Uma matriz A é denominada matriz coluna quando possuir uma só coluna.

Notação: $A=(a_{ij})_{m\times 1}$

Exemplo: $\begin{pmatrix}3\\9\\1\end{pmatrix}_{3\times 1}$

3. Matriz **Nula**

Uma matriz A é denominada matriz nula quando todos os seus elementos forem nulos, isto é, $a_{ij}=0$ para todo $i=1,2,...,m$ e para todo $j=1,2,...,n$.

Notação: $\mathbf{0}_{m\times n}$

Exemplo: $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{2\times 3}$

4. Matriz **Quadrada**

Uma matriz A é uma matriz quadrada quando possuir o mesmo número de linhas e de colunas, isto é, $m=n$.

Notação: $A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\... & ... & ... & ...\\a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}\end{pmatrix}$

Diagonal Principal: são os elementos da matriz A onde $i=j$ para todo $i,j=1,2,...,n$.

Diagonal Secundária: são os elementos da matriz A onde $i+j=n+1$ para todo $i,j=1,2,...,n$.

Traço: é o somatório dos elementos da diagonal principal da matriz A, denotado por trA.

$$trA=\sum_{k=1}^{n}a_{kk}=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$$

Exemplo: $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\5 & 7 & 0\\10 & -1 & 9\end{pmatrix}_{3\times 3}$

Elementos da diagonal principal: 2, 7 e 9.

Elementos da diagonal secundária: 4, 7 e 10.

$trA=2+7+9=18$

5. Matriz **Diagonal**

Uma matriz quadrada A é chamada de matriz diagonal quando todos os elementos que não pertencem à diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$ para todo $i, j = 1,2,...,n$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

6. Matriz **Identidade**

Uma matriz diagonal A é chamada de matriz identidade quando os elementos da diagonal principal forem todos iguais a um.

Notação: I_n

Exemplo: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

7. Matriz **Triangular Superior**

Uma matriz quadrada A é uma matriz triangular superior quando os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ quando $i > j$ para todo $i, j = 1,2,...,n$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{4\times 4}$

8. Matriz **Triangular Inferior**

Uma matriz quadrada A é chamada de matriz triangular inferior quando os elementos acima da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ quando $i < j$ para todo $i, j = 1,2,...,n$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

Operações com Matrizes

1. Adição

Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ matrizes de mesma ordem, define-se a matriz soma $C = A + B$ tal que $C = (c_{ij})_{m\times n}$ e $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $i = 1,2,...,m$ e para todo $j = 1,2,...,n$.

Exemplos:

1) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 2,5 \\ -4 & 0,5 & 5 \end{pmatrix}$.

Então $A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2-7 & -1+2,5 \\ 5-4 & 3+0,5 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1,5 \\ 1 & 3,5 & 9 \end{pmatrix}$.

2) Um laboratório farmacêutico produz um certo medicamento. Os custos relativos à compra e transporte de quantidades específicas da substância necessárias para a sua elaboração, adquiridas em dois fornecedores distintos são dados (em reais) respectivamente pelas seguintes matrizes.

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc} \text{preço compra} & \text{custo transporte} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{substância A} \\ \text{substância B} \\ \text{substância C} \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 12 & 8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & \begin{array}{cc} \text{preço compra} & \text{custo transporte} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{substância A} \\ \text{substância B} \\ \text{substância C} \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Fornecedor 1   Fornecedor 2

A matriz que representa os custos totais de compra e de transporte de cada uma das substâncias A, B e C é dada por:

$$\begin{pmatrix} 9 & 23 \\ 21 & 17 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Propriedades da Operação de Adição

A1. **Associativa**: para quaisquer matrizes A, B e C de mesma ordem, $(A+B)+C = A+(B+C)$.

A2. **Comutativa**: para quaisquer matrizes A e B de mesma ordem, $A+B = B+A$.

Dem.: Considere matrizes de ordem $m \times n$, $A+B=C$ e $B+A=D$.

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = d_{ij}$ para todo $i = 1,...,m$ e para todo $j = 1,...,n$.

Assim, $C = D$.

Logo, a operação de adição é comutativa.

A3. **Elemento Neutro**: para toda matriz A, $A + \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{0}_{m\times n} + A = A$.

A4. **Elemento Simétrico**:para toda matriz A de ordem $m \times n$ existe uma matriz S de mesma ordem tal que $A + S = S + A = \mathbf{0}_{m\times n}$.

Sendo $A = (a_{ij})_{m\times n}$ tem-se $S = (s_{ij})_{m\times n} = -(a_{ij})_{m\times n}$.

Notação: $S = -A$

Assim, $A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{0}_{m\times n}$.

Além disso, $A + (-B) = A - B$.

A5. Para quaisquer matrizes quadradas A e B de mesma ordem, $tr(A+B) = trA + trB$.

Dem: Considere as matrizes de ordem n.

$$tr(A+B) = (a_{11} + b_{11}) + ... + (a_{nn} + b_{nn}) = (a_{11} + ... + a_{nn}) + (b_{11} + ... + b_{nn}) = tr(A) + tr(B)$$

2. Multiplicação por Escalar

Sejam $A=(a_{ij})_{m\times n}$ uma matriz e $k\in \mathbf{R}$ um escalar, define-se a matriz produto por escalar $B=k\cdot A$ tal que $B=(b_{ij})_{m\times n}$ e $b_{ij}=k\cdot a_{ij}$ para todo $i=1,2,...,m$ e para todo $j=1,2,...,n$.

Exemplos:

1) Sejam $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ e $k=-3$.

Então $(-3)\cdot A=\begin{pmatrix} (-3).1 & (-3).0 \\ (-3).3 & (-3).(-5) \\ (-3).(-1) & (-3).7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -9 & 15 \\ 3 & -21 \end{pmatrix}$

2) O quadro abaixo mostra a produção de trigo, cevada, milho e arroz em três regiões, em uma determinada época do ano.

	TRIGO	CEVADA	MILHO	ARROZ
REGIÃO I	1200	800	500	700
REGIÃO II	600	300	700	900
REGIÃO III	1000	1100	200	450

Com os incentivos oferecidos, estima-se que a safra no mesmo período do próximo ano seja duplicada. A matriz que representa a estimativa de produção para o próximo ano é:

$$\begin{pmatrix} 2400 & 1600 & 1000 & 1400 \\ 1200 & 600 & 1400 & 1800 \\ 2000 & 2200 & 400 & 900 \end{pmatrix}$$

Propriedades da Operação de Multiplicação por Escalar

E1. Para toda matriz A e para quaisquer escalares $k_1,k_2\in \mathbf{R}$, $(k_1+k_2)\cdot A=k_1\cdot A+k_2\cdot A$.

E2. Para toda matriz A e para quaisquer escalares $k_1,k_2\in \mathbf{R}$, $(k_1\cdot k_2)\cdot A=k_1\cdot(k_2\cdot A)$.

E3. Para quaisquer matrizes A e B de mesma ordem e para qualquer escalar $k\in \mathbf{R}$, $k\cdot(A+B)=k\cdot A+k\cdot B$.

Dem.: Considere matrizes de ordem $m\times n$, $k\cdot(A+B)=k\cdot C=D$ e $k\cdot A+k\cdot B=E+F=G$.

$d_{ij}=k\cdot c_{ij}=k\cdot(a_{ij}+b_{ij})=k\cdot a_{ij}+k\cdot b_{ij}=e_{ij}+f_{ij}=g_{ij}$, para todo $i=1,...,m$ e para todo $j=1,...,n$.

Assim, $D=G$.

Logo, vale a propriedade.

E4. Para toda matriz A de ordem $m\times n$, $0\cdot A=\mathbf{0}_{m\times n}$.

E5. Para toda matriz A de ordem $m\times n$, $1\cdot A=A$.

E6. Para toda matriz quadrada A e para todo $k\in \mathbf{R}, tr(k\cdot A)=k\cdot trA$.

3. Multiplicação

Sejam as matrizes $A=(a_{ij})_{m\times p}$ e $B=(b_{ij})_{p\times n}$, define-se a matriz produto $C=A\cdot B$ tal que $C=(c_{ij})_{m\times n}$ e $c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\cdot b_{kj}$, isto é, $c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+...+a_{ip}\cdot b_{pj}$ para todo $i=1,2,...,m$ e para todo $j=1,2,...,n$.

Exemplos:

1) Sejam $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Então $A\cdot B=\begin{pmatrix} 1.2+0.1 & 1.3+0.0 & 1.1+0.(-1) \\ 2.2+1.1 & 2.3+1.0 & 2.1+1.(-1) \\ (-1).2+4.1 & (-1).3+4.0 & (-1).1+4.(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

Observe que $A=(a_{ij})_{3\times 2}$, $B=(b_{ij})_{2\times 3}$ e $C=(c_{ij})_{3\times 3}$.

2) A matriz abaixo nos fornece as quantidades de vitaminas A, B e C obtidas em cada unidade dos alimentos I e II.

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{alimento I} \\ \text{alimento II} \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ao serem ingeridas 5 unidades do alimento I e 2 unidades do alimento II a quantidade consumida de cada tipo de vitamina é dada por:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\cdot 4+2\cdot 5 & 5\cdot 3+2\cdot 0 & 5\cdot 0+2\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 30 & 15 & 2 \end{pmatrix}$$

Serão consumidas 30 unidades de vitamina A, 15 unidades de vitamina B e 2 unidades de vitamina C.

Propriedades da Operação de Multiplicação

M1. **Associativa**: para quaisquer matrizes *A, B* e *C* de ordens $m\times p$, $p\times l$ e $l\times n$, respectivamente, $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$.

Dem.: Considere $(A\cdot B)\cdot C=D\cdot C=E$ e $A\cdot(B\cdot C)=A\cdot F=G$.

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \sum_{k=1}^{l} d_{ik}\cdot c_{kj}=\sum_{k=1}^{l}(\sum_{t=1}^{p} a_{it}\cdot b_{tk})\cdot c_{kj}= \\ &=(a_{i1}b_{11}+...+a_{ip}b_{p1})c_{1j}+(a_{i1}b_{12}+...+a_{ip}b_{p2})c_{2j}+...+(a_{i1}b_{1l}+...+a_{ip}b_{pl})c_{lj} \\ &=a_{i1}b_{11}c_{1j}+...+a_{ip}b_{p1}c_{1j}+a_{i1}b_{12}c_{2j}+...+a_{ip}b_{p2}c_{2j}+...+a_{i1}b_{1l}c_{lj}+...+a_{ip}b_{pl}c_{lj} \\ &=a_{i1}(b_{11}c_{1j}+b_{12}c_{2j}+...+b_{1l}c_{lj})+...+a_{ip}(b_{p1}c_{1j}+b_{p2}c_{2j}+...+b_{pl}c_{lj}) \\ &=\sum_{t=1}^{p} a_{it}\cdot(\sum_{k=1}^{l} b_{tk}\cdot c_{kj})=\sum_{t=1}^{p} a_{it}\cdot f_{tj}=g_{ij} \end{aligned}$$

para todo $i=1,...,m$ e para todo $j=1,...,n$.

Assim, $E=G$.

Logo, vale a propriedade associativa para multiplicação de matrizes.

M2. **Distributiva da Multiplicação em relação à Adição**: para quaisquer matrizes A e B de ordem $m \times p$, para toda matriz C de ordem $p \times n$ e para toda matriz D de ordem $l \times m$, $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ e $D \cdot (A+B) = D \cdot A + D \cdot B$.

M3. **Elemento Neutro**: para toda matriz quadrada A de ordem n, $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

M4. Para quaisquer matrizes quadradas A e B de mesma ordem, $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.

M5. Para quaisquer matrizes quadradas A e B de mesma ordem e para todo $k \in \mathbf{R}$, $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$

M6. Para toda matriz quadrada A de ordem n, $A.\mathbf{0}_{n\times n} = \mathbf{0}_{n\times n} \cdot A = \mathbf{0}_{n\times n}$

Em geral, **não** vale a propriedade comutativa para a operação de multiplicação.
Assim, $A \cdot B \neq B \cdot A$.
Quando $A \cdot B = B \cdot A$, diz-se que A e B são matrizes **comutáveis**, ou ainda que A e B são matrizes que **comutam** entre si.
Por M6, qualquer matriz quadrada comuta com a matriz quadrada nula de mesma ordem.

Exemplos:

1) Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{2\times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3\times 2}$.
$A \cdot B = C = (c_{ij})_{2\times 2} \neq (d_{ij})_{3\times 3} = D = B \cdot A$.

2) Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{2\times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3\times 1}$.
$A \cdot B = C = (c_{ij})_{2\times 1}$ e a matriz produto $B \cdot A$ não é definida.

3) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} = B \cdot A$

4) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Assim, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = B \cdot A$.
Logo, as matrizes A e B comutam entre si.

Potência de uma Matriz Quadrada de Ordem *n*.

$$A^0 = I_n$$
$$A^1 = A$$
$$A^2 = A \cdot A$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A^k = A \cdot A^{k-1} = A^{k-1} \cdot A$$

Toda matriz quadrada A comuta com qualquer potência natural de A.

Exemplos:

1) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Então $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Sejam o polinômio $f(x) = x^2 + 2x - 11$ e a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Determinando o valor $f(A)$:

$f(x) = x^2 + 2x - 11 = x^2 + 2x^1 - 11x^0$

$f(A) = A^2 + 2 \cdot A^1 - 11 \cdot A^0 = A^2 + 2 \cdot A^1 - 11 \cdot I_2$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} - 11 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz A é uma raiz do polinômio, já que $f(A) = \mathbf{0}_{2\times 2}$.

Matriz Idempotente

Uma matriz quadrada A é idempotente quando $A^2 = A$.

Exemplo: A matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ é idempotente. (Verifique!)

4. Transposição

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, define-se a matriz transposta B tal que $B = (b_{ij})_{n\times m}$ e $b_{ij} = a_{ji}$, isto é, é a matriz obtida a partir da matriz A pela troca de suas linhas pelas colunas correspondentes.

Notação: $B = A^t$

Propriedades da Operação de Transposição

T1. **Involução**: para toda matriz A, $(A^t)^t = A$.

T2. Para quaisquer matrizes A e B de mesma ordem, $(A + B)^t = A^t + B^t$.

Dem.: Considere matrizes de ordem $m \times n$, $(A + B)^t = C^t = D$ e $A^t + B^t = E + F = G$.

$d_{ij} = c_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = e_{ij} + f_{ij} = g_{ij}$ para todo $i = 1,\dots,m$ e para todo $j = 1,\dots,n$.

Assim, $D = G$.

T3. Para toda matriz A e para todo escalar $k \in \mathbf{R}$, $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$.

T4. Para toda matriz A de ordem $m \times p$ e para toda matriz B de ordem $p \times n$, $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

T5. Para toda matriz quadrada A, $tr(A^t) = trA$.

Classificação de Matrizes Quadradas

1. Matriz **Simétrica**

Uma matriz quadrada A é denominada simétrica quando $A^t = A$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Os elementos da matriz dispostos simetricamente em relação à diagonal principal são iguais.

2. Matriz **Anti-simétrica**

Uma matriz quadrada A é denominada anti-simétrica quando $A^t = -A$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 7 \\ 1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

Todos os elementos da diagonal principal são iguais a zero e os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal têm sinais contrários.

3. Matriz **Invertível** ou **Não-singular**

Uma matriz quadrada A de ordem n é dita invertível se existir uma matriz quadrada B de mesma ordem tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. A matriz B é dita matriz inversa da matriz A.

Notação: $B = A^{-1}$

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Exemplos:

1) A matriz $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ é invertível e sua inversa é $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ pois:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Obtendo a matriz inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Considere $B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$

Se $A \cdot B = I_n$ então $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y & 2z - t \\ x & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Assim, $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x = 0 \\ 2z - t = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

Desta forma, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Verifica-se também que $B \cdot A = I_n$.

Então a matriz inversa da matriz A é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3) A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ não possui inversa.

Propriedades das Matrizes Invertíveis

I1. **Involução**: $(A^{-1})^{-1} = A$.

I2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

dem.: $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = (A \cdot (B \cdot B^{-1})) \cdot A^{-1} = (A \cdot I_n) \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$.

Analogamente, $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = (B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A)) \cdot B = (B^{-1} \cdot I_n) \cdot B = B^{-1} \cdot B = I_n$.

Logo, o produto é invertível.

I3. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Semelhança de Matrizes

Duas matrizes $A, B \in Mat_n(\mathbf{R})$ são **semelhantes** quando existe uma matriz invertível $P \in Mat_n(\mathbf{R})$ tal que $B = P^{-1}AP$.

Exemplo: As matrizes $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ são semelhantes.

Considere $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Assim, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Matriz **Ortogonal**

Uma matriz quadrada A de ordem n invertível é denominada ortogonal quando $A^{-1} = A^t$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

5. Matriz **Normal**

Uma matriz quadrada A de ordem n é dita normal quando comuta com sua matriz transposta, isto é, $A \cdot A^t = A^t \cdot A$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Operações Elementares

São operações realizadas nas linhas de uma matriz. São consideradas operações elementares:

OE1. A troca da linha *i* pela linha *j*.

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

OE2. A multiplicação da linha i por um escalar $k \in \mathbf{R}$ não nulo.

$$L_i \leftarrow k \cdot L_i$$

OE3. A substituição da linha *i* por ela mesma mais *k* vezes a linha *j*, com $k \in \mathbf{R}$ não nulo.

$$L_i \leftarrow L_i + k \cdot L_j$$

Exemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + (-1) L_1 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz Equivalente por Linha

Sejam *A* e *B* matrizes de mesma ordem. A matriz *B* é denominada equivalente por linha a matriz *A*, quando for possível transformar a matriz *A* na matriz *B* através de um número finito de operações elementares sobre as linhas da matriz *A*.

Exemplo: A matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ é equivalente a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pois usando somente operações elementares nas linhas da primeira matriz foi possível transformá-la na segunda.

Matriz na Forma Escalonada

Uma matriz está na forma escalonada quando o número de zeros, que precede o primeiro elemento não nulo de uma linha, aumenta linha a linha. As linhas nulas, se existirem, aparecem abaixo das não nulas.

Exemplos: $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Escalonamento por Linha de uma Matriz
Dada uma matriz qualquer, é possível obter uma matriz equivalente por linhas a esta matriz na forma escalonada:

Exemplos:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + (-4)L_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + (-7)L_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + (-2)L_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + (-3)L_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow (-\tfrac{1}{6})L_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + (-2)L_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} L_4 \leftarrow L_4 + (-5)L_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A escolha de operações em um escalonamento não é única. O importante é observar que o objetivo é aumentar o número de zeros, que precede o primeiro elemento não nulo de cada linha, linha a linha.

Posto de uma Matriz
O posto de uma matriz *A* pode ser obtido escalonando-se a matriz *A*. O número de linhas não nulas após o escalonamento é o posto da matriz *A*.
Notação: P_A

Exemplo: Nos dois exemplos anteriores o posto das matrizes é igual a dois.

Aplicações de Operações Elementares

1. **Cálculo da Inversa** de uma Matriz Quadrada *A* de ordem *n*.

   Passo 1: Construir a matriz $(A \mid I_n)$ de ordem $n \times 2n$.

   Passo 2: Utilizar operações elementares nas linhas da matriz $(A \mid I_n)$ de forma a transformar o bloco *A* na matriz identidade I_n.
   Caso seja possível, o bloco I_n terá sido transformado na matriz A^{-1}.
   Se não for possível transformar *A* em I_n é porque a matriz *A* não é invertível.

   Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. A matriz inversa é $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + (-3)L_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + (-1)L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -6 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow (-1)L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -6 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + (-2)L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow (-1)L_{31} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + (-1)L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Justificativa do Método para o Cálculo da Matriz Inversa

Teorema: Uma matriz quadrada A de ordem n é invertível se e somente se a matriz A é equivalente por linha a matriz I_n.

Desta forma, a seqüência de operações elementares que reduz a matriz A na matriz I_n, transforma a matriz I_n na matriz A^{-1}.

Exemplo: Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

A redução da matriz A à matriz identidade é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \mathrm{L}_2 \leftarrow \frac{1}{3}\mathrm{L}_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + (-2)\mathrm{L}_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando em I_n a mesma seqüência de operações:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{L}_2 \leftarrow \frac{1}{3}\mathrm{L}_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + (-2)\mathrm{L}_2 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Assim, a matriz $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ é a inversa da matriz A.

2. Cálculo do Determinante

A qualquer matriz quadrada A podemos associar um certo número real denominado **determinante** da matriz.

Notação: $\det A$ ou $|A|$

É importante observar que:

a) Quando trocamos duas linhas de uma matriz A, seu determinante troca de sinal.

b) O determinante da matriz fica multiplicado pelo escalar não nulo k quando todos os elementos de uma certa linha forem multiplicados por k.

c) O determinante não se altera quando utilizamos a operação elementar do tipo $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + k \cdot \mathrm{L}_j$. (Teorema de Jacobi).

d) O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

O cálculo do determinante de uma matriz quadrada, utilizando-se operações elementares nas linhas da matriz, consiste em encontrar uma matriz triangular equivalente por linha à matriz dada, respeitando-se as propriedades de determinantes acima.

Exemplos:

1) $$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = 3\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (-3)\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (-3)\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix} =$$
$$(-3)\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{pmatrix} = (-3)\cdot 1 \cdot 1 \cdot (-55) = 165$$

2) $$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 29 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} = (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 29 \end{pmatrix} =$$
$$(-2)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 29 \end{pmatrix} = (-2)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 45 \end{pmatrix} = (-2)\cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 45 = -90$$

Outras informações sobre este tópico encontram-se no Apêndice A.

3. Resolução de Sistemas

Outra aplicação de operações elementares é na resolução de sistemas, que será visto com detalhes no próximo capítulo.

Exercícios

1) Resolva a equação matricial $\begin{pmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, indicando os valores para a, b, c e d.

2) Considere $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 9 & 9 \end{pmatrix}$ e $k = 4$. Verifique se:

a) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

b) $k \cdot (B - C) = k \cdot B - k \cdot C$

c) $tr(A + B) = trA + trB$

d) $tr(A \cdot C) = trA \cdot trC$

3) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Indique uma matriz quadrada B de ordem 2 não nula tal que $A \cdot B = \mathbf{0}_{2\times 2}$.

4) Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Resolva a equação matricial $A \cdot X = I_2$, onde $X = (x_{ij})_{2\times 2}$.

5) Mostre que, em geral, $A^2 - B^2 \neq (A - B) \cdot (A + B)$, sendo A e B matrizes quadradas de mesma ordem.

6) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encontre A^n.

7) Verifique que a matriz $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ é uma raiz do polinômio $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

8) Considere $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Indique a matriz $A^2 - 2 \cdot A + I_2$

b) A matriz A é invertível? Em caso afirmativo, indique $A^{-3} = (A^{-1})^3$.

9) Mostre que as únicas matrizes quadradas de ordem 2 que comutam tanto com a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ quanto com a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ são múltiplas de I_2.

10) Determine todas as matrizes de ordem 2 que comutam com a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

11) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$. Verifique a igualdade $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

12) Mostre que se a matriz quadrada A for invertível e $A \cdot B = A \cdot C$ então $B = C$. (Lei do Corte)

13) Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. É possível calcular X, na equação $A \cdot X = B$?

14) Sejam A, B, C e X matrizes quadradas de mesma ordem e invertíveis. Resolva as equações, considerando X a variável.
   a) $A \cdot B \cdot X = C$
   b) $C \cdot A \cdot X' = C$
   c) $A \cdot X^2 \cdot C = A \cdot X \cdot B \cdot C$
   d) $A \cdot B^{-1} \cdot X = C \cdot A$
   e) $A^2 \cdot X' = A \cdot B \cdot A$

15) Seja A uma matriz de ordem n tal que a matriz $(A' \cdot A)$ é invertível. A matriz $A \cdot (A' \cdot A)^{-1} \cdot A'$ é simétrica? E idempotente?

16) Mostre que a matriz $\begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ é uma matriz ortogonal.

17) Determine a, b e c de modo que a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & b & c \end{pmatrix}$ seja ortogonal.

18) Mostre que a soma de duas matrizes simétricas é também uma matriz simétrica.

19) Mostre que o mesmo vale para matrizes anti-simétricas.

20) Se A e B são matrizes simétricas que comutam entre si então a matriz $B \cdot A^2$ também é simétrica? Justifique.

21) Toda matriz ortogonal é também uma matriz normal? Justifique.

22) O produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal? Justifique.

23) Em uma pesquisa onde foram consideradas 3 marcas de refrigerante, Gelato, Delícia e Suave, o elemento a_{ij} da matriz abaixo indica a possibilidade de uma pessoa que consuma o refrigerante i passar a consumir o refrigerante j. O elemento da diagonal principal representa a possibilidade de uma pessoa que consuma um determinado refrigerante permaneça consumindo o mesmo refrigerante.

$$\begin{array}{c|ccc} & \text{Gelato} & \text{Delícia} & \text{Suave} \\ \hline \text{Gelato} & 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ \text{Delícia} & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ \text{Suave} & 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{array}$$

a) Qual a possibilidade de uma pessoa que consumia o refrigerante Gelato passar a consumir o refrigerante Suave? E a de quem consumia Suave passar a consumir Gelato?
b) Escreva a matriz que indica a possibilidade de se mudar de marca após duas pesquisas.

24) Verifique se a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ é invertível. Em caso afirmativo, indique a matriz inversa.

25) Para que valores de a a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ admite inversa?

26) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Indique a matriz $(A \mid I_3)$ e determine A^{-1}.

27) Dada a matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Indique a matriz A.

28) Determinar o valor de a a fim de que a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ seja invertível.

29) Calcule o determinante das matrizes $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

30) Sabendo que A é uma matriz quadrada de ordem n e que $\det A = 5$, determine:
a) $\det(3 \cdot A)$
b) $\det A^t$
c) $\det(-A)$
d) $\det A^2$

31) Encontre todos os valores de a para os quais $\det\begin{pmatrix} a-1 & 5 \\ 0 & a+3 \end{pmatrix} = 0$.

Respostas

1) $a=5, b=-3, c=4, d=1$

3) $B=\left\{\begin{pmatrix} -2z & -2t \\ z & t \end{pmatrix}, t,z\in \mathbf{R}^*\right\}$

4) $X=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

6) $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

8) a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$

10) $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, x,y\in \mathbf{R}\right\}$

13) Sim, $X=\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

14) a) $X=B^{-1}\cdot A^{-1}\cdot C$
b) $X=(A^{-1})^t$
c) $X=B$
d) $X=B\cdot A^{-1}\cdot C\cdot A$
e) $X=(A^{-1}\cdot B\cdot A)^t$

15) Sim. Sim.

17) $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $c=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $c=\frac{\sqrt{2}}{2}$

23) a) 0,1 e 0,6 b) $\begin{pmatrix} 0{,}74 & 0{,}15 & 0{,}11 \\ 0{,}58 & 0{,}31 & 0{,}11 \\ 0{,}68 & 0{,}20 & 0{,}12 \end{pmatrix}$

24) $A^{-1}=\begin{pmatrix} -16 & -11 & 3 \\ \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

25) $a\neq -2$

26) $A^{-1}=\begin{pmatrix} -11 & 6 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

27) $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

28) $a\neq 1$

29) 0 e 24, respectivamente.

30) a) $3^n\cdot 5$
b) 5
c) $\begin{cases} 5 & \text{se } n \text{ for par} \\ -5 & \text{caso contrário} \end{cases}$
d) 25

31) $a=1$ ou $a=-3$

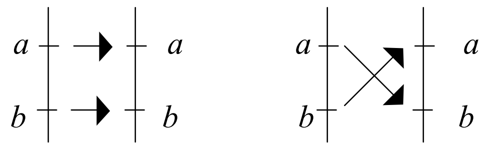
Apêndice A - Determinante

Permutações

Seja um conjunto finito A qualquer, uma **permutação** em A é qualquer função bijetora $f : A \to A$. Sendo n a cardinalidade do conjunto, existem $n!$ permutações possíveis.

Exemplos:

1) Seja $A = \{a, b\}$ e as bijeções abaixo:



A notação usual é:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Nesta notação matricial, a primeira linha indica os elementos originais e a segunda os elementos reorganizados.

2) Seja $A = \{1,2,3\}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ são três das seis permutações possíveis em A.

3) Seja $A = \{a, b, c, d\}$.

$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ é uma das 24 permutações possíveis.

Se A for um conjunto munido de uma relação de ordem, as permutações podem ser classificadas como permutações pares e permutações ímpares. Uma permutação é par quando o número de elementos - dentre os elementos reorganizados - “fora de ordem” for par e é ímpar quando este número for ímpar.

Exemplos:

1) Seja $A = \{1,2,3\}$ com a ordem numérica usual, isto é, $1 \leq 2 \leq 3$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ são permutações ímpares e $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ é par.

2) Seja $A = \{a, b, c, d\}$ com a ordem lexicográfica (alfabética) usual.

$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ é uma permutação ímpar.

Além disto, às permutações pares é associado o sinal positivo e às ímpares o sinal negativo.

O Determinante

Dada uma matriz quadrada A de ordem n é possível fazer corresponder um certo número denominado **determinante da matriz A**.

Notação: $\det A \quad |A| \quad \det(a_{ij})_{n\times n}$

Considere, por exemplo, uma matriz quadrada de ordem 3, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, e as permutações possíveis no conjunto de índices $\{1, 2, 3\}$.

A partir da permutação ímpar $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ associa-se o produto "$-a_{11}a_{23}a_{32}$", tal que os índices linha correspondem a primeira linha da representação da permutação, os índices coluna são obtidos da segunda linha e o sinal negativo da classificação da permutação.

O determinante de uma matriz de ordem 3 é obtido a partir de todas as seis permutações possíveis no conjunto de índices $\{1, 2, 3\}$ classificadas e sinalizadas.

Assim, o determinante é dado por:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{23}a_{31}$$

Genericamente, para uma matriz de ordem n, o determinante é o número obtido do somatório dos produtos sinalizados de elementos a_{ij} da matriz, combinados de acordo com as permutações do conjunto de índices $\{1, 2,..., n\}$.

Exemplos:

1) $\det(6)=6$

2) $\det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = (-1).7 - 0.2 = -7$

3) $$\det\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= 2.0.0 - 2.4.\frac{1}{2} - 5.(-1).0 + 5.4.0 + (-2).(-1).\frac{1}{2} - (-2).0.0$$

$$= -3$$

Desenvolvimento de Laplace

Seja uma matriz quadrada de ordem *n*,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & ... & ..... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Considere um elemento a_{ij} qualquer, com $i, j = 1,...,n$ e a submatriz A_{ij} de ordem $(n-1)$ obtida a partir da matriz *A* retirando-se a *i*-ésima linha e a *j*-ésima coluna. O determinante da submatriz A_{ij} sinalizado por $(-1)^{i+j}$ é denominado o **cofator do elemento** a_{ij}.

Exemplo: Seja a matriz $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

O cofator do elemento a_{23}, isto é, de 4 é : $(-1)^{2+3}.\det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = (-1).1 = -1$

O cofator do elemento $a_{31} = 0\,\mathrm{a}_{31}$ é: $(-1)^{3+1}.\det\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 1.20 = 20$

Considere uma certa linha *i* fixada. O determinante da matriz *A* fica definido por:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$$

A expressão é uma fórmula de recorrência (faz uso de determinantes de matrizes de ordem menores) conhecida como **desenvolvimento de Laplace**.

Este desenvolvimento pode ser feito fixando-se uma certa coluna *j* e a expressão passa a ser:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$$

Exemplos:

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ fixada a linha 2.

$\det A = a_{21}(-1)^{2+1}\det A_{21} + a_{22}(-1)^{2+2}\det A_{22} = 2.(-1)^3.|0| + 7.(-1)^4.|-1| = 2.(-1).0 + 7.1.(-1) = -7$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ fixada a linha 1.

$\det A = a_{11}(-1)^{1+1}\det A_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}\det A_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}\det A_{13}$

$= 2.1.\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ \dfrac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} + 5.(-1).\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-2).1.\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix}$

Fixando ainda a linha 1 para as submatrizes:

$$\det A = 2.1.[0.(-1)^{1+1}.\det A_{11} + 4.(-1)^{1+2}.\det A_{12}] +$$
$$5.(-1).[(-1).(-1)^{1+1}.\det A_{11} + 4.(-1)^{1+2}.\det A_{12}] +$$
$$(-2).1.[(-1).(-1)^{1+1}.\det A_{11} + 0.(-1)^{1+2}.\det A_{12}]$$
$$= 2.1.[0.1.|0| + 4.(-1).\left|\frac{1}{2}\right|] + 5.(-1).[(-1).1.|0| + 4.(-1).|0|] + (-2).1.[(-1).1.\left|\frac{1}{2}\right| + 0.(-1).|0|]$$
$$= 2.1.(-2) + 5.(-1).0 + (-2).1.\frac{1}{2} = -4 + 1 = -3$$

Propriedades

Considere A e B matrizes quadradas de ordem n e $k \in \mathbf{R}$ não nulo.

D1. Se A é uma matriz triangular superior (inferior) então $\det A = a_{11}a_{22}...a_{nn}$.

dem: Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ... & ... & ..... & .... \\ 0 & 0 & .... & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Fixando a coluna 1 para o cálculo dos determinantes,

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1}\det A_{i1} = a_{11}(-1)^{1+1}\det A_{11} + a_{21}(-1)^{2+1}\det A_{21} + ... + a_{n1}(-1)^{n+1}\det A_{n1}$$
$$= a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & ... & a_{3n} \\ \multicolumn{4}{c}{......................} \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}\sum_{i=1}^{n-1} a_{i1}(-1)^{i+1}\det A_{i1}$$
$$= a_{11}[a_{22}(-1)^{1+1}\det A_{11} + ... + a_{nn}(-1)^{n-1+1}\det A_{(n-1)1}]$$
$$= a_{11}a_{22}\det\begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} & ... & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & ... & a_{4n} \\ \multicolumn{4}{c}{......................} \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\sum_{i=1}^{n-2} a_{i1}(-1)^{i+1}\det A_{i1}$$
$$= a_{11}a_{22}[a_{33}(-1)^{1+1}\det A_{11} + ... + a_{nn}(-1)^{n-2+1}\det A_{(n-2)1}]$$
$$= a_{11}a_{22}...a_{nn}$$

Corolários:

i) $\det \mathbf{0}_n = 0$

ii) $\det I_n = 1$

iii) Se A é uma matriz diagonal então $\det A = a_{11}a_{22}...a_{nn}$.

D2. $\det A = 0$, quando A possuir uma linha (ou coluna) nula.

D3. $\det A = 0$, quando A possuir duas linhas (ou colunas) iguais.

D4. $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$

D5. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

D6. $\det A = \det A^t$

D7.Considere a matriz A e B a matriz obtida a partir de A por aplicação de operações elementares:

a) $L_i \leftrightarrow L_j$: $\det B = -\det A$

b) $L_i \leftarrow k.L_i$: $\det B = k \cdot \det A$

dem: Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Fixando a linha i para o cálculo dos determinantes,

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Seja a matriz $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \ldots & ka_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ obtida pela operação elementar $L_i \leftarrow k.L_i$.

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} (ka_{ij})(-1)^{i+j} \det A_{ij} = k \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij} = k \cdot \det A$$

c) $L_i \leftarrow L_i + k.L_j$: $\det B = \det A$

D8. A é uma matriz invertível se e somente se $\det A \neq 0$.

D9. Se A é uma matriz invertível então $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

D10. Se A e B são matrizes semelhantes então $\det A = \det B$.

D11. Se A é uma matriz ortogonal então $\det A = \pm 1$.

Exercícios

1) Calcule o determinante usando permutações.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

2) Calcule o determinante usando desenvolvimento de Laplace.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) Indique o valor de x para que as matrizes sejam invertíveis.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & x \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ -1 & 1 & x \\ x & 1 & -1 \end{pmatrix}$

SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Definição

Dados os números reais $a_1, a_2, ..., a_n, b$, com $n \geq 1$, a equação $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_n \cdot x_n = b$ onde $x_1, x_2, ..., x_n$ são **variáveis ou incógnitas**, é denominada **equação linear nas variáveis** $x_1, x_2, ..., x_n$. Os números reais $a_1, a_2, ..., a_n$ são denominados **coeficientes das variáveis** $x_1, x_2, ..., x_n$, respectivamente, e b é denominado de **termo independente**.

Um **Sistema Linear sobre R com *m* equações e *n* incógnitas** é um conjunto de $m \geq 1$ equações lineares com $n \geq 1$ variáveis, e é representado por:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \text{...} \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Com $a_{ij}, b_i \in \mathbf{R}$, $i = 1,...,m$ e $j = 1,...,n$.

Matrizes Associadas a um Sistema Linear

Sistemas podem ser representados na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}}_{C} . \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}$$

Denominadas, **matriz *C* de Coeficientes**, **matriz *X* de Variáveis** e **matriz *B* de Termos Independentes**.

Assim, um sistema linear com *m* equações e *n* incógnitas fica representado pela equação matricial $C \cdot X = B$.

Outra matriz que se pode associar a um sistema linear é a **Matriz Ampliada ou Completa** do sistema.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Classificação de Sistemas

Classifica-se um sistema linear de acordo com o tipo de solução.

Uma **solução** para um sistema de equações lineares é uma *n*-upla de números reais $(s_1, s_2, ..., s_n)$ que satisfaz todas as equações, simultaneamente, isto é, substituindo-se a variável x_1 pelo valor s_1, x_2 por s_2, ... e x_n por s_n em cada uma das equações, todas as igualdades são verdadeiras. O **conjunto solução** S do sistema é o conjunto de todas as soluções.

Exemplo: Dado o sistema $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$, o par ordenado (2,0) é solução deste sistema. Assim, o conjunto solução $S = \{(2,0)\}$.

De forma geral, temos que um dado sistema de equações lineares sobre **R** pode ser classificado como:

- **Sistema Possível** (ou **Compatível** ou **Consistente**)
    - **Determinado (SPD)**: há uma única solução
    - **Indeterminado (SPI)**: há infinitas soluções
- **Sistema Impossível** (ou **Incompatível** ou **Inconsistente**) **(SI)**: não há solução**.**

Resolução de Sistemas utilizando o Método de Eliminação Gaussiana

Dado um sistema de equações lineares, espera-se encontrar sua solução, isto é resolvê-lo. O método de resolução utilizado será o **Método de Eliminação Gaussiana**.

A idéia do método é obter um sistema mais "simples" equivalente ao sistema dado. Dois sistemas de equações lineares são denominados **sistemas equivalentes** quando possuem a mesma solução.

Exemplo: Os sistemas $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases}$ são equivalentes pois ambos possuem o mesmo conjunto solução $S = \{(2,-2)\}$.

O Método de Eliminação Gaussiana

Dado um sistema linear com *m* equações e *n* variáveis:

1. Obter a matriz ampliada.

2. Escalonar a matriz ampliada utilizando operações elementares.

3. Fazer a análise, de acordo com o teorema abaixo:

   Teorema: Um sistema linear de *m* equações e *n* variáveis admite solução se e somente se o posto da matriz ampliada escalonada (P_A) for igual ao posto da matriz de coeficientes (P_C).

   Assim:

   a) Se $P_A = P_C = n$, o sistema é Possível Determinado (SPD).

   b) Se $P_A = P_C < n$, o sistema é Possível Indeterminado (SPI).

   c) Se $P_A \neq P_C$, o sistema é Impossível (SI).

4. Reescrever o sistema, associado a matriz escalonada, equivalente ao sistema dado, e:

   a) Se o sistema for SPD, encontrar o valor de uma variável e, por substituição, determinar as demais variáveis. Indicar o conjunto solução *S*, que neste caso, conterá apenas uma *n*-upla.

b) Se o sistema for SPI, escolher $n-P_A$ variáveis **livres** ou **independentes**. O número, $n-P_A$ também é denominado o **grau de liberdade** ou **grau de indeterminação** do sistema.
As variáveis que dependem das variáveis livres são denominadas variáveis **amarradas** ou **ligadas**.
Indicar o conjunto solução *S*, apresentando todas as ordenadas da *n*-upla em função das variáveis livres.

c) Se o sistema for SI, indicar $S=\varnothing$.

Exemplo: Seja o sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+3z=0 \\ -x+y-5z=2 \end{cases}$ com 3 equações e 3 incógnitas.

A matriz ampliada é $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Após o escalonamento, a matriz escalonada é $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

E a matriz de coeficientes é: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Análise: $P_A=P_C=n=3$.

Logo, o sistema é possível determinado (SPD).

O sistema equivalente é $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y-\frac{1}{3}z=\frac{2}{3} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}$

Após as substituições, $y=\dfrac{1}{2}$ e $x=1$.

A solução do sistema é $S=\{(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}$.

Resolvendo e Interpretando Geometricamente Sistemas Lineares no R^2

O conjunto de pares ordenados de números reais é designado por $\mathbf{R}^2=\{(x,y)\,|\,x\in\mathbf{R} \text{ e } y\in\mathbf{R}\}$.
Geometricamente tem-se o plano $\mathbf{R}^2$, descrito por dois eixos - eixo *X* e eixo *Y* - perpendiculares entre si, interceptando-se no ponto $(0,0)$, denominado origem.

Exemplos:

1) Seja o sistema com 2 equações e 2 variáveis: $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$

Aplicando o Método de Eliminação Gaussiana:

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Matriz escalonada: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

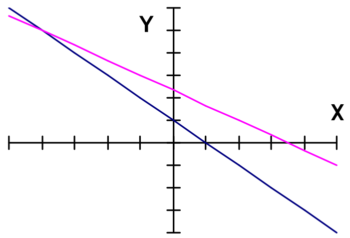
Análise, $P_A = P_C = n = 2$: Sistema Possível Determinado (SPD).

Sistema equivalente $\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 5 \end{cases}$

Substituindo o valor de *y* na primeira equação, tem-se $x = -4$.

Logo a solução do sistema é descrita por $S = \{(-4,5)\}$.

Interpretando geometricamente: cada equação do sistema representa uma reta, estas retas se interceptam em um único ponto $(-4,5)$.



2) Dado o sistema: $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases}$

Matriz ampliada: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.

Matriz escalonada: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz de coeficientes: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

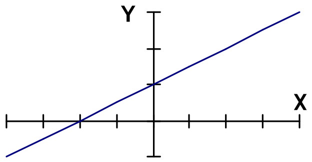
Análise, $P_A = P_C = 1 < n = 2$: Sistema Possível Indeterminado (SPI).

Sistema equivalente $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 0y = 0 \end{cases}$

A variável *y* está livre, podendo assumir qualquer valor real, e a variável *x* amarrada em função de *y*, isto é, $x = 2y - 2$.

A solução do sistema é $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 2y - 2\} = \{(2y - 2, y), y \in \mathbf{R}\}$.

Geometricamente, tem-se duas retas coincidentes, a equação $2x - 4y = -4$ é múltipla da equação $x - 2y = -2$. Assim, as retas se interceptam em infinitos pontos.



3) Dado o sistema $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=-3 \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Matriz escalonada: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

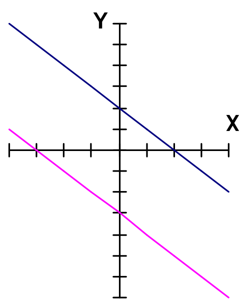
Matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Análise, $P_A = 2 \neq 1 = P_C$: Sistema Impossível.

Sistema equivalente $\begin{cases} x+y=2 \\ 0y=-5 \end{cases}$, isto é, $\begin{cases} x+y=2 \\ 0=-5 \end{cases}$

A solução é $S = \varnothing$.

Assim, se um sistema possui equações que representam retas paralelas, como no exemplo, uma solução é impossível, pois não há ponto de interseção entre retas paralelas.



Resumindo, para sistemas de equações de duas incógnitas com duas ou mais equações, tem-se o seguinte quadro:

Retas	***Classificação do Sistema***
Concorrentes	Possível e Determinado
Coincidentes	Possível e Indeterminado
Paralelas	Impossível

Resolvendo e Interpretando Geometricamente Sistemas Lineares no R^3

O conjunto de todos as triplas de números reais é designado por $\mathbf{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R} \text{ e } z \in \mathbf{R}\}$.

Geometricamente tem-se o espaço $\mathbf{R}^3$, descrito por três eixos, eixo *X*, eixo *Y* e eixo *Z*, que são perpendiculares entre si, interceptando-se no ponto $(0,0,0)$, denominado origem.

Exemplos:

1) Considere o sistema $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2y+z=2 \\ y+2z=2 \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ e matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

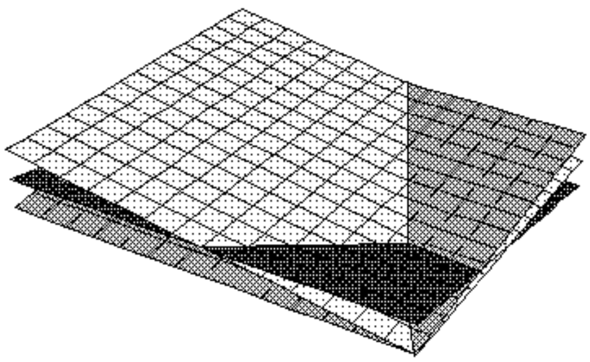
Análise, $P_A = P_C = n = 3$: Sistema Possível Determinado (SPD) .

Sistema equivalente $\begin{cases} x+y+z=3 \\ y+2z=2 \\ -3z=-2 \end{cases}$

Sendo $z=\dfrac{2}{3}$, fazendo-se as substituições: $y=\dfrac{2}{3}$ e $x=\dfrac{5}{3}$.

A solução do sistema é $S=\left\{\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}$.

Geometricamente, o sistema representa três planos distintos que se interceptam no ponto $\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.



2) Dado o sistema $\begin{cases} x+y+z=3 \\ y+2z=2 \\ x-z=1 \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

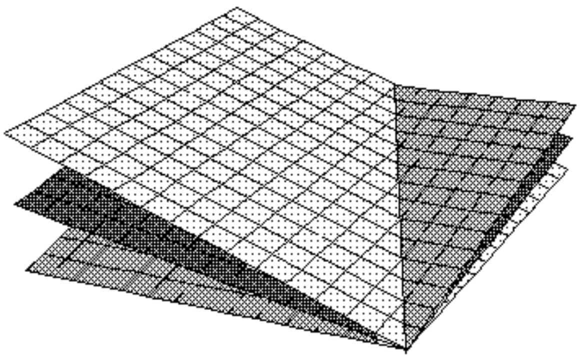
Análise, $P_A = P_C = 2 < n = 3$: Sistema Possível Indeterminado (SPI).

Sistema equivalente $\begin{cases} x+y+z=3 \\ y+2z=2 \\ 0z=0 \end{cases}$

Pela terceira equação, a variável z está livre, assim a variável y fica em função de z, isto é, $y = 2-2z$. A variável x também fica amarrada a variável z, após as substituições, tem-se que $x = 1+z$. Esta sistema possui grau de liberdade 1.

A solução do sistema é $S = \{(1+z, 2-2z, z), z \in \mathbf{R}\}$.

Geometricamente, o sistema representa três planos distintos que se interceptam em uma reta.



3) Seja o sistema $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ -x-2y-z=-3 \\ 2x+4y+2z=6 \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

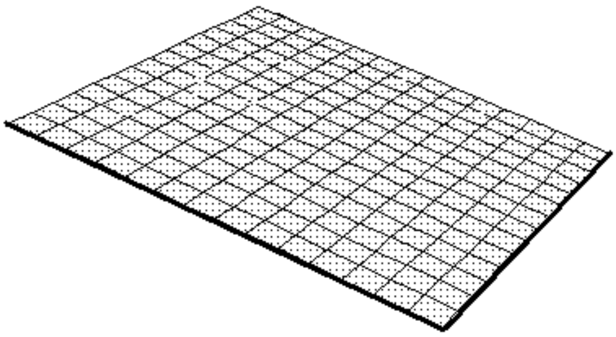
Análise, $P_A = P_C = 1 < n = 3$: Sistema Possível Indeterminado (SPI).

Sistema equivalente $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 0y=0 \\ 0z=0 \end{cases}$

As variáveis y e z estão livres, o grau de liberdade do sistema é igual a 2, e a variável x está amarrada pela relação $x = 3-2y-z$.

A solução do sistema é $S = \{(3-2y-z, y, z), y, z \in \mathbf{R}\}$.

Geometricamente, os três planos são coincidentes e, consequentemente, qualquer ponto deste plano é solução para o sistema.



4) Seja o sistema $\begin{cases} x-4y-3z=2 \\ 3x-12y-9z=6 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 2 \\ 3 & -12 & -9 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

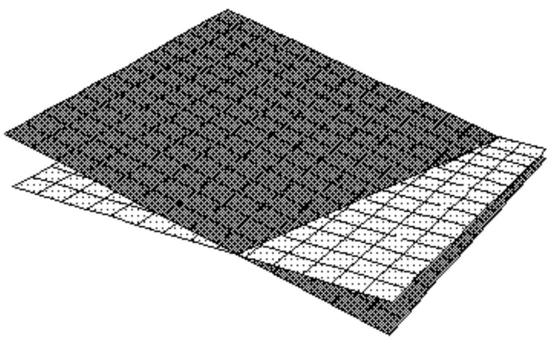
Análise, $P_A = P_C = 2 < n = 3$: Sistema Possível Indeterminado (SPI).

Sistema equivalente $\begin{cases} x-4y-3z=2 \\ y+\frac{4}{5}z=-\frac{1}{5} \\ 0z=0 \end{cases}$

A variável z está livre, o grau de liberdade é 1. As variáveis x e y estão ligadas à variável z, e irão assumir valores de acordo as relações $y=\frac{-1-4z}{5}$ e $x=\frac{6-z}{5}$.

A solução é $S=\left\{\left(\frac{6-z}{5},\frac{-1-4z}{5},z\right), z\in \mathbf{R}\right\}$.

Geometricamente, o sistema representa dois planos coincidentes que interceptam um terceiro. A interseção é uma reta.



5) Seja o sistema $\begin{cases} x+y+z=-10 \\ 2x+y+z=-20 \\ y+z=-40 \end{cases}$

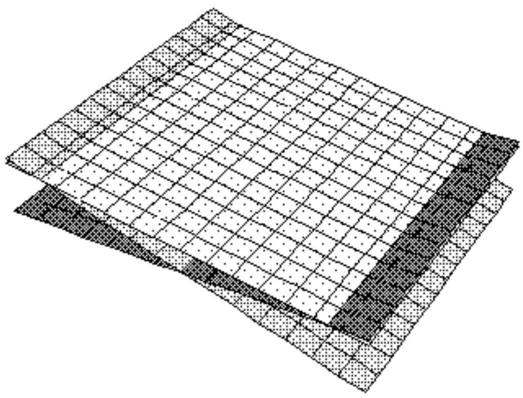
Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 2 & 1 & 1 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & -40 \end{pmatrix}$, matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & -40 \end{pmatrix}$ e matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Análise, $P_A = 3 \neq P_C = 2$: Sistema Impossível (SI).

Sistema equivalente $\begin{cases} x+y+z=-10 \\ y+z=-40 \\ 0z=-40 \end{cases}$

A terceira equação é equivalente a $0=-40$, o que é impossível. A solução é $S=\varnothing$.

Geometricamente, o sistema representa três planos distintos que se interceptam dois a dois, isto é, sem solução comum.



6) Dado o sistema $\begin{cases} x+y+z=10 \\ x+y+z=20 \\ x+y+z=30 \end{cases}$

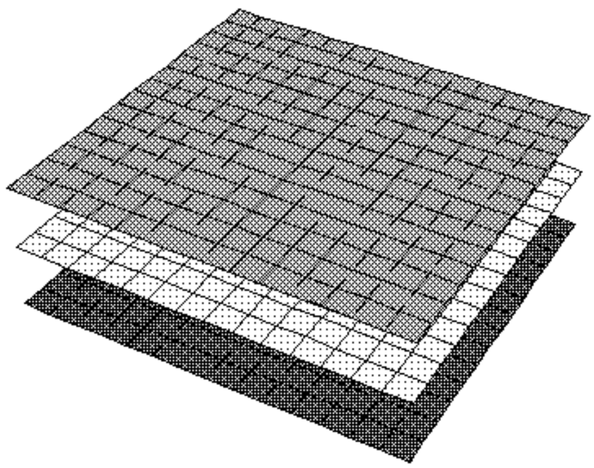
Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & 1 & 30 \end{pmatrix}$, matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$ e matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Análise, $P_A = 3 \neq P_C = 1$: Sistema Impossível (SI).

Sistema equivalente $\begin{cases} x+y+z=10 \\ 0y=10 \\ 0z=20 \end{cases}$

As duas últimas equações são impossíveis. A solução é $S = \varnothing$.

Geometricamente, o sistema representa três planos paralelos.



7) Dado o sistema: $\begin{cases} x+3y-5z=-20 \\ 7x-2y+3z=2 \\ 2x+6y-10z=50 \end{cases}$

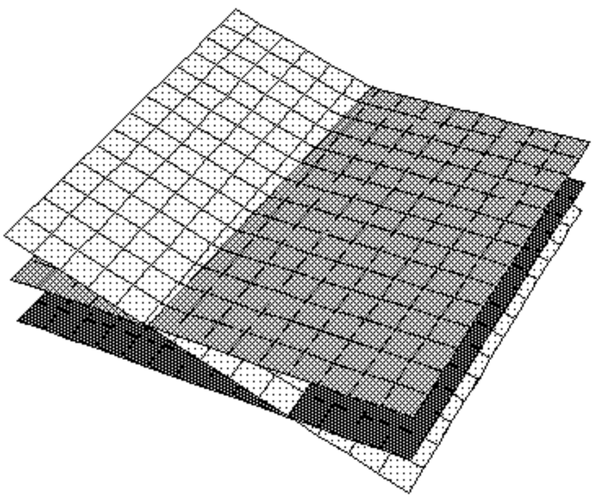
Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -20 \\ 7 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -10 & 50 \end{pmatrix}$, matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -20 \\ 0 & -23 & 38 & 142 \\ 0 & 0 & 0 & 90 \end{pmatrix}$ e matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -23 & 38 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Análise, $P_A = 3 \neq P_C = 2$: Sistema Impossível (SI).

Sistema equivalente $\begin{cases} x+3y-5z=-20 \\ -23y+38z=142 \\ 0z=90 \end{cases}$

A última equação não possui solução. Assim, a solução do sistema é $S=\varnothing$.

Geometricamente, o sistema representa dois planos paralelos interceptados por um terceiro.



8) Seja o sistema $\begin{cases} 9x + y - 5z = 16 \\ 18x + 2y - 10z = 32 \\ -9x - y + 5z = 4 \end{cases}$

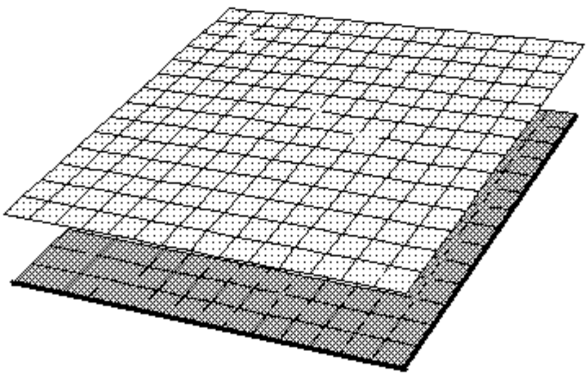
Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 9 & 1 & -5 & 16 \\ 18 & 2 & -10 & 32 \\ -9 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, matriz escalonada $\begin{pmatrix} 9 & 1 & -5 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 9 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Análise, $P_A = 2 \neq P_C = 1$: Sistema Impossível (SI).

Sistema equivalente $\begin{cases} 9x + y - 5 = 16 \\ 0y = 20 \\ 0z = 0 \end{cases}$

A segunda equação não possui solução. A solução é $S = \varnothing$.

Geometricamente, o sistema representa dois planos coincidentes paralelos a um terceiro.



Sistema Homogêneo

É um sistema de equações lineares onde todos os termos independentes são iguais a zero.

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n = 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n = 0 \end{cases}$$

A matriz de Termos Independentes B é a matriz nula, assim um sistema homogêneo é sempre possível, já que admite a solução trivial, isto é, $S = \{(0,0,...,0)\}$.

No entanto, um sistema possível pode ainda ser classificado como determinado ou indeterminado. Se o sistema é possível e determinado, a única solução é a trivial. Se o sistema é possível e indeterminado, outras soluções, além da trivial, existem.

Exemplos:

1) Seja o sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ e matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Análise, $P_A = P_C = n = 3$: Sistema Possível Determinado (SPD).

Sistema equivalente $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$

Este sistema só admite solução trivial. Assim, $S = \{(0,0,0)\}$.

2) Seja o sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ x - 2y - 3z = 0 \\ 6x - 3y - 6z = 0 \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ 6 & -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$, matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Análise, $P_A = P_C = 2 < n = 3$: Sistema Possível Indeterminado (SPI).

Sistema equivalente $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+\dfrac{4}{3}z=0 \\ 0z=0 \end{cases}$

A variável z está livre e as variáveis x e y estão amarradas.

A solução do sistema é $S=\left\{\left(\frac{1}{3}z,-\frac{4}{3}z,z\right), z\in \mathbf{R}\right\}$.

Resolução de Sistemas utilizando Inversão de Matrizes

O sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas, com $m=n$, pode ser representado pela equação matricial $C\cdot X=B$, sendo C uma matriz quadrada de ordem n.

Se a matriz C for invertível, isto é, existir a matriz inversa C^{-1}, significa que o sistema é possível e determinado.

$$\begin{gathered} C\cdot X=B \\ C^{-1}\cdot(C\cdot X)=C^{-1}\cdot B \\ (C^{-1}\cdot C)\cdot X=C^{-1}\cdot B \\ I_n\cdot X=C^{-1}\cdot B \\ X=C^{-1}\cdot B \end{gathered}$$

Como X é uma matriz de ordem $n\times 1$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}=C^{-1}\cdot B$

Exemplo: Seja o sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+3z=0 \\ -x+y-5z=2 \end{cases}$

A equação matricial $C\cdot X=B$ é: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

A matriz inversa da matriz C é $C^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{7}{10} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$.

Assim, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{7}{10} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

A solução do sistema é $S=\{(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}$.

Exercícios

Utilizando o Método de Eliminação Gaussiana:

1) Resolva o sistema $\begin{cases} x - 2y + 4z = 2 \\ 2x - 3y + 5z = 3 \\ 3x - 4y + 6z = 7 \end{cases}$.

2) Indique a solução do sistema $\begin{cases} x - 2y - 3z = 2 \\ 4x - y - 4z = 1 \\ 2x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$, o posto da matriz ampliada e o posto da matriz de coeficientes.

3) Um fabricante de objetos de cerâmica produz jarras e pratos decorativos. Cada jarra exige 16 minutos de modelagem, 8 minutos de polimento e 30 minutos de pintura. Cada prato decorativo necessita de 12 minutos de modelagem, 6 de polimento e 15 de pintura. Sabendo-se que são reservadas por semana 8 horas para modelagem, 4 horas para polimento e 13 horas para pintura, encontre a quantidade de cada tipo de objeto que deverá ser fabricada por semana, considerando-se a melhor utilização do tempo disponível para cada etapa.

	Jarras	Pratos Decorativos	Minutos Por Semana
Modelagem	16	12	8.60
Polimento	8	6	4.60
Pintura	30	15	13.60

Considerando-se x como sendo a quantidade de jarras a serem produzidas por semana e y a quantidade de pratos decorativos, escreva o sistema de equações lineares que representa o problema e resolva-o.

4) Determine os valores de a de modo que o sistema $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$ seja:

a) SPD
b) SPI
c) SI

6) Calcule os valores para a e b de modo que o sistema $\begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ 3x + 6y - 4z = 4 \\ x + by - 6z = 1 \end{cases}$ seja SPI e resolva-o para estes valores.

7) Estabeleça a condição que deve ser satisfeita pelos termos independentes para que o sistema $\begin{cases} 2x + 4y + 2z = a \\ 3x + 6y + 3z = b \\ -3x - 4y - z = c \end{cases}$ seja possível.

7) Escreva a condição para que o sistema $\begin{cases} x+8y-2z=a \\ 5x+4y-2z=b \\ 7x-16y+2z=c \end{cases}$ tenha solução.

8) Indique o conjunto solução do sistema homogêneo $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ -3x+y-z=0 \end{cases}$.

9) Determine o conjunto solução S do sistema $\begin{cases} x-y+z+t=0 \\ x+y-z+t=0 \\ -x+y-z-t=0 \\ 2x-y-z+3t=0 \end{cases}$

10) Escreva um sistema homogêneo com quatro incógnitas, x, y, z e t, quatro equações e grau de liberdade igual a dois. Resolva-o.

11) Considere o sistema $\begin{cases} x+2y-2z=1 \\ 2x+5y-4z=2 \\ 3x+7y-5z=3 \end{cases}$. Escreva na forma matricial e calcule a matriz X utilizando a inversão de matrizes.

Respostas

1) Sistema Impossível

2) $S=\{(-\frac{10}{7},\frac{9}{7},-2)\}$

3) $x=18, y=16$

4) a) $a\neq 2$ e $a\neq -3$
   b) $a=2$
   c) $a=-3$

5) $a=\frac{11}{7}$ e $b=2$

6) $2b-3a=0$ e c qualquer

7) $3a-2b+c=0$

8) $S=\{(0,0,0)\}$

9) $S=\{(-2z,z,z,2z), z\in \mathbf{R}\}$ ou
$S=\{(-t,\frac{t}{2},\frac{t}{2},t), t\in \mathbf{R}\}$

11) $C^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $X=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ESPAÇO VETORIAL REAL DE DIMENSÃO FINITA

Definição

Sejam um conjunto não vazio V, o conjunto dos números reais $\mathbf{R}$ e duas operações binárias, adição e multiplicação por escalar.

$$+ : V \times V \to V \qquad\qquad \cdot : \mathbf{R} \times V \to V$$
$$(v,u) \mapsto v+u \qquad\qquad (k,v) \mapsto k \cdot v$$

V é um Espaço Vetorial sobre $\mathbf{R}$, ou Espaço Vetorial Real ou um $\mathbf{R}$-espaço vetorial, com estas operações se as propriedades abaixo, chamadas axiomas do espaço vetorial, forem satisfeitas:

EV1. (Associativa) Para quaisquer $v, u, w \in V$, $(v+u)+w = v+(u+w)$.
EV2. (Comutativa) Para todo $v, u \in V$, $v+u = u+v$.
EV3. (Elemento Neutro) Existe $e \in V$ tal que para todo $v \in V$, $e+v = v+e = v$.
Notação: $e = \mathbf{0}_V$
EV4. (Elemento Simétrico) Para todo $v \in V$, existe $v' \in V$ tal que $v+v' = v'+v = \mathbf{0}_V$.
Notação: $v' = -v$
Assim, $v+(-u) = v-u$
EV5. Para quaisquer $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ e para todo $v \in V$, $k_1 \cdot (k_2 \cdot v) = (k_1 k_2) \cdot v$.
EV6. Para quaisquer $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ e para todo $v \in V$, $(k_1 + k_2) \cdot v = (k_1 \cdot v) + (k_2 \cdot v)$.
EV7. Para todo $k \in \mathbf{R}$ e para quaisquer $v, u \in V$, $k \cdot (v+u) = (k \cdot v) + (k \cdot u)$.
EV8. Para todo $v \in V$, $1 \cdot v = v$.

Os elementos de um espaço vetorial são denominados **vetores** e os números reais de **escalares**.

Exemplos :

1) $\mathbf{R}^2$ com as operações:
$$(x,y)+(z,t) = (x+z, y+t)$$
$$k \cdot (x,y) = (kx, ky)$$
É um espaço vetorial pois os oito axiomas acima são verificados, cabe lembrar que o elemento neutro da adição $\mathbf{0}_V$ é o par ordenado $(0,0)$.

2) $\mathbf{R}^n$ com as operações:
$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$
$$k \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) = (kx_1, kx_2, ..., kx_n)$$

3) O conjunto das matrizes reais de ordem $m \times n$, com as operações usuais é um espaço vetorial, tal que o elemento neutro da adição é a matriz nula.

4) O conjunto dos polinômios, com coeficientes reais, de grau menor ou igual a n, com as operações abaixo:
$$p(x)+q(x) = (a_n + b_n)x^n + ... + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$
$$k \cdot p(x) = ka_n x^n + ... + ka_1 x + ka_0$$
onde $p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_n x^n + ... + b_1 x + b_0$.
É um espaço vetorial, onde o elemento neutro da adição $\mathbf{0}_V$ é o polinômio $0x^n + ... + 0x + 0$.

5) $\mathbf{R}^2$ com as operações abaixo não é um espaço vetorial.

$(x, y) + (z, t) = (x + z, 0)$

$k \cdot (x, y) = (kx, ky)$

Não possui elemento neutro, pois:

Seja $\mathbf{0}_V = (e_1, e_2)$ tal que $(x, y) + (e_1, e_2) = (x, y)$.

Mas, $(x, y) + (e_1, e_2) = (x + e_1, 0)$.

Assim, $(x, y) = (x + e_1, 0)$.

Portanto, para todo $y \in \mathbf{R}, y = 0$.

Logo, não existe elemento neutro.

Subespaço Vetorial

Um subespaço vetorial de *V* é um subconjunto não vazio $S \subseteq V$ com as seguintes propriedades:

Sub1. $\mathbf{0}_V \in S$.

Sub2. Fechamento de *S* em relação à operação de Adição.

Se $u \in S$ e $v \in S$ então $u + v \in S$.

Sub3. Fechamento de *S* em relação à operação de Multiplicação por Escalar

Se $u \in S$ e $k \in \mathbf{R}$ então $k \cdot u \in S$.

Notação: $S \leq V$.

Exemplos:

1) $S = \{(x, 0, 0), x \in \mathbf{R}\}$ é um subespaço vetorial do $\mathbf{R}^3$ com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais.

Um vetor *u* pertence ao subespaço *S* quando possui a 2ª e 3ª coordenadas iguais a zero.

Verificando as propriedades de subespaço.

1. $\mathbf{0}_V \in S$? Sim, $(0,0,0) \in S$.

2. Se $u \in S$ e $v \in S$ então $u + v \in S$?

Sejam $u = (x_1, 0, 0) \in S$ e $v = (x_2, 0, 0) \in S$.

Então $u + v = (x_1 + x_2, 0, 0) \in S$.

Logo, *S* é fechado sob a operação de adição de vetores.

3. Se $u \in S$ e $k \in \mathbf{R}$ então $k \cdot u \in S$?

Seja $u = (x_1, 0, 0) \in S$.

Então $k \cdot u = (kx_1, 0, 0) \in S$.

Logo, *S* é fechado sob a operação de multiplicação por escalar.

O subespaço *S* poderia ser descrito ainda por $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = 0 \text{ e } z = 0\}$.

2) O conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = 0 \text{ e } y \geq z\}$ não é um subespaço vetorial do $\mathbf{R}^3$ com as operações usuais.

1. $\mathbf{0}_V \in S$? Sim, $(0,0,0)$ satisfaz as condições $x = 0$ e $y \geq z$.

2. Se $u \in S$ e $v \in S$ então $u + v \in S$?

Sejam $u = (0, y, z) \in S$ e $v = (0, t, r) \in S$, com $y \geq z$ e $t \geq r$.

Então $u+v=(0, y+t, z+r) \in S$, com $y+t \geq z+r$.

3. Se $u \in S$ e $k \in \mathbf{R}$ então $k \cdot u \in S$?
Não. (Contra-exemplo)
Sejam $(0,4,-1) \in S$ e $-2 \in \mathbf{R}$.
$(-2)\cdot(0,4,-1)=(0,-8,2) \notin S$, pois $-8 \leq 2$.

3) $S=\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x=y+1\}$ não é um subespaço do $\mathbf{R}^3$, pois $(0,0,0) \notin S$.

O fato do vetor $\mathbf{0}_V$ pertencer ao conjunto *S* não implica que este seja um subespaço.

Todo espaço vetorial *V* admite pelo menos dois subespaços: o próprio espaço *V* e o conjunto $\{\mathbf{0}_V\}$, chamado subespaço nulo. Estes dois subespaços são denominados **subespaços triviais** de *V* e os demais **subespaços próprios** de *V*.

Combinação Linear

Sejam os vetores $v_1, v_2, ..., v_n \in V$. Um vetor $w \in V$ está escrito como combinação linear dos vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ quando existem $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbf{R}$ tais que $w = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n$.

Exemplos:

1) O vetor $(-1,-1)$ é uma combinação linear dos vetores $(1,2)$ e $(3,5)$, pois: $(-1,-1)=2\cdot(1,2)+(-1)\cdot(3,5)$

2) O vetor $(1,2,3)$ não pode ser escrito como combinação linear dos vetores $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$, pois:
$k_1 \cdot (1,0,0) + k_2 \cdot (0,0,1) = (1,2,3) \quad (*)$
$(k_1,0,0)+(0,0,k_2)=(1,2,3)$
$(k_1,0,k_2)=(1,2,3)$
Assim, $\begin{cases} k_1 = 1 \\ 0 = 2 \\ k_2 = 3 \end{cases}$
O sistema é impossível.
Logo não existem valores reais para k_1 e k_2 que satisfaçam a igualdade (*).

3) Determinando a "lei" que define (todos) os vetores que podem ser escritos como combinação linear de $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$.
$k_1 \cdot (1,0,0) + k_2 \cdot (0,0,1) = (x,y,z)$
$(k_1,0,0)+(0,0,k_2)=(x,y,z)$
$(k_1,0,k_2)=(x,y,z)$
Assim, $\begin{cases} k_1 = x \\ 0 = y \\ k_2 = z \end{cases}$
O sistema é possível quando $y=0$ e para quaisquer $x,z \in \mathbf{R}$.
Assim, $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid y=0\}$ é o conjunto de todos os vetores escritos como combinação linear de $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$.
Geometricamente, trata-se do plano XZ.

Subespaço Vetorial Gerado e Conjunto Gerador

Sejam os vetores $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ e $[v_1, v_2, ..., v_n]$ o conjunto de todas as combinações lineares destes vetores. O conjunto $[v_1, v_2, ..., v_n]$ é um subespaço vetorial de *V*, denominado **subespaço vetorial gerado** pelos vetores $v_1, v_2, ..., v_n$.

O conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é o **conjunto gerador** do subespaço $[v_1, v_2, ..., v_n]$.

Exemplos:

1) O vetor $(1,2) \in \mathbf{R^2}$ gera o conjunto $[(1,2)] = \{(x,2x), x \in \mathbf{R}\}$.

$k \cdot (1,2) = (x, y)$

$(k,2k) = (x, y)$

Assim, $\begin{cases} k = x \\ 2k = y \therefore y = 2x \end{cases}$

O conjunto de todas as combinações lineares do vetor $(1,2)$ é o conjunto de todos os seus múltiplos escalares.

Geometricamente, $[(1,2)]$ é uma reta definida pela equação $y - 2x = 0$.

2) $[(1,1,0),(1,2,1)] = \{(x, y, z) \in \mathbf{R^3} \mid x - y + z = 0\}$.

$k_1 \cdot (1,1,0) + k_2 \cdot (1,2,1) = (x, y, z)$

$(k_1, k_1, 0) + (k_2, 2k_2, k_2) = (x, y, z)$

$(k_1 + k_2, k_1 + 2k_2, k_2) = (x, y, z)$

Assim, $\begin{cases} k_1 + k_2 = x \\ k_1 + 2k_2 = y \\ k_2 = z \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}$ e matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y - x \\ 0 & 0 & z - y + x \end{pmatrix}$.

Para se determinar os vetores que são combinações lineares de $(1,1,0)$ e $(1,2,1)$ é necessário que o sistema seja possível, isto é, $x - y + z = 0$.

Logo, $[(1,1,0),(1,2,1)] = \{(x, y, z) \in \mathbf{R^3} \mid x - y + z = 0\} = \{(y - z, y, z), y, z \in \mathbf{R}\}$.

Geometricamente, $[(1,1,0),(1,2,1)]$ é um plano no $\mathbf{R^3}$ com equação $x - y + z = 0$.

3) $[(1,3),(4,2)] = \mathbf{R^2}$.

$k_1 \cdot (1,3) + k_2 \cdot (4,2) = (x, y)$

$(k_1 + 4k_2, 3k_1 + 2k_2) = (x, y)$

Assim, $\begin{cases} k_1 + 4k_2 = x \\ 3k_1 + 2k_2 = y \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 4 & x \\ 3 & 2 & y \end{pmatrix}$ e matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 4 & x \\ 0 & 1 & \dfrac{3x - y}{10} \end{pmatrix}$.

Como o sistema é possível e determinado, nenhuma condição deve ser satisfeita.

Logo, $[(1,3),(4,2)] = \mathbf{R^2}$.

4) Encontre a equação do espaço gerado pelos vetores $(1,1,2), (-2,0,1)$ e $(-1,1,3)$.

O espaço gerado é o conjunto de vetores $v = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ que possam ser escritos como combinação linear dos vetores dados, isto é, $k_1 \cdot (1,1,2) + k_2 \cdot (-2,0,1) + k_3 \cdot (-1,1,3) = (x, y, z)$.

Assim, $\begin{cases} k_1 - 2k_2 - k_3 = x \\ k_1 + 0k_2 + k_3 = y \\ 2k_1 + 2k_2 + 3k_3 = z \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 2 & 1 & 3 & z \end{pmatrix}$ e matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & x \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{y-x}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{x-5y+2z}{2} \end{pmatrix}$.

Para que o sistema seja possível é necessário que $x - 5y + 2z = 0$.

Assim, com esta condição satisfeita, obtém-se vetores $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ que são combinação linear dos vetores dados.

Portanto, o espaço gerado é $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 5y + 2z = 0\}$, que geometricamente representa um plano em $\mathbf{R}^3$.

Vetores Linearmente Independentes e Linearmente Dependentes

Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq V$ é **linearmente independente** (LI) quando $k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n = \mathbf{0}_V$ se e somente se $k_1 = k_2 = ... = k_n = 0$.

Se existir pelo menos um $k_i \neq 0$, com $i = 1, ..., n$, então o conjunto é **linearmente dependente** (LD).

Exemplos:

1) $\{(1,3), (4,2)\}$ é LI, pois:

$k_1 \cdot (1,3) + k_2 \cdot (4,2) = (0,0)$

$(k_1 + 4k_2, 3k_1 + 2k_2) = (0,0)$

Assim, $\begin{cases} k_1 + 4k_2 = 0 \\ 3k_1 + 2k_2 = 0 \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

O sistema é possível e determinado com $k_1 = k_2 = 0$.

Assim, o conjunto é LI. Um dos vetores não é múltiplo escalar do outro.

Foi visto que o espaço gerado por $\{(1,3), (4,2)\}$ é $\mathbf{R}^2$, ou seja $[(1,3), (4,2)] = \mathbf{R}^2$.

2) $\{(1,3), (2,6)\}$ é LD, pois:

$k_1 \cdot (1,3) + k_2 \cdot (2,6) = (0,0)$

$(k_1 + 2k_2, 3k_1 + 6k_2) = (0,0)$

Assim, $\begin{cases} k_1 + 2k_2 = 0 \\ 3k_1 + 6k_2 = 0 \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ e matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

O sistema é possível e indeterminado, com $k_1 = -2k_2$. Então, o conjunto é LD, pois $(2,6) = 2 \cdot (1,3)$. Os vetores (1,3) e (2,6) pertencem a uma mesma reta. O espaço gerado pelo conjunto {(1,3), (2,6)} é $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 3x\}$, isto é, $[(1,3),(2,6)] = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 3x\}$.

3) {(2,0,5),(1,2,3),(3,2,8)} é LD, pois: $k_1 \cdot (2,0,5) + k_2 \cdot (1,2,3) + k_3 \cdot (3,2,8) = (0,0,0)$

Assim, $\begin{cases} 2k_1 + k_2 + 3k_3 = 0 \\ 2k_2 + 2k_3 = 0 \\ 5k_1 + 3k_2 + 8k_3 = 0 \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ e matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Como o sistema é possível e indeterminado, o conjunto é LD.

Base e Dimensão de um Espaço Vetorial

Seja um conjunto finito $B \subseteq V$. Diz-se que *B* é uma **base** do espaço vetorial *V* quando *B* é um conjunto linearmente independente e gera *V*, isto é, $[B] = V$.

O número de elementos (cardinalidade) de uma base *B* do espaço vetorial *V* é denominado **dimensão** do espaço vetorial *V*.

Se a dimensão de *V* é igual a *n*, diz-se que *V* é um espaço vetorial finito *n*-dimensional. Em particular, a dimensão do espaço nulo $\{\mathbf{0}_V\}$ é zero. Não há base para o espaço nulo.

Notação: $\dim V$

Exemplos:

1) Os conjuntos {(1,0), (0,1)} e {(1,3), (4,2)} são bases do $\mathbf{R}^2$.
   O conjunto {(1,2), (3,5), (2,1)} não é base do $\mathbf{R}^2$, pois apesar de gerar $\mathbf{R}^2$, não é LI.
   O conjunto {(1,2)} é LI mas não gera o $\mathbf{R}^2$, portanto também não é uma base do $\mathbf{R}^2$.
   Toda base de $\mathbf{R}^2$ tem dois vetores de $\mathbf{R}^2$ que geram $\mathbf{R}^2$ e que são LI.
   Logo, $\dim \mathbf{R}^2 = 2$.

2) {(-1,0,1),(2,3,0),(1,2,3)} é uma base do $\mathbf{R}^3$.
   O conjunto {(-1,0,1),(2,3,0)} é LI, mas não gera o $\mathbf{R}^3$. Logo, não é base do $\mathbf{R}^3$.
   O conjunto {(-1,0,1),(2,3,0),(1,2,3),(0,2,4)} gera o $\mathbf{R}^3$, mas não é LI. Também não é uma base do $\mathbf{R}^3$.
   Toda base de $\mathbf{R}^3$ é formada por três vetores LI de $\mathbf{R}^3$.
   Logo, $\dim \mathbf{R}^3 = 3$.

Um vetor qualquer $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ pode ser escrito como $(x, y, z) = x \cdot (1,0,0) + y \cdot (0,1,0) + z \cdot (0,0,1)$
Assim, {(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)} gera o $\mathbf{R}^3$, isto é, $[(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)] = \mathbf{R}^3$.
Além disso, este conjunto é LI.
Logo, {(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)} é uma base do $\mathbf{R}^3$, denominada a **base canônica** do $\mathbf{R}^3$.

Espaço Vetorial	*Base Canônica*	*Dimensão*
$\mathbf{R}$	$\{1\}$	1
$\mathbf{R}^2$	$\{(1,0),(0,1)\}$	2
$\mathbf{R}^4$	$\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$	4
$Mat_{2\times 2}(\mathbf{R})$	$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$	4
Polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a 2	$\{1, x, x^2\}$	3

Operações com Subespaços Vetoriais

1. **Interseção**

Sejam S_1 e S_2 subespaços do espaço vetorial real *V*.

O conjunto interseção de S_1 e S_2, $S_1 \cap S_2 = \{v \in V \mid v \in S_1 \text{ e } v \in S_2\}$, é também um subespaço vetorial de V.

(Sub1) $\mathbf{0}_V \in S_1 \cap S_2$?

$\mathbf{0}_V \in S_1$, pois $S_1 \leq V$.

$\mathbf{0}_V \in S_2$, pois $S_2 \leq V$.

Assim, $\mathbf{0}_V \in S_1 \cap S_2$.

(Sub2) Se $v \in S_1 \cap S_2$ e $u \in S_1 \cap S_2$ então $v + u \in S_1 \cap S_2$?

$v \in S_1 \cap S_2 \therefore v \in S_1$ e $v \in S_2$

$u \in S_1 \cap S_2 \therefore u \in S_1$ e $u \in S_2$

Então, $v + u \in S_1$ e $v + u \in S_2$.

Logo, $v + u \in S_1 \cap S_2$.

(Sub3) Se $v \in S_1 \cap S_2$ e $k \in \mathbf{R}$ então $k \cdot v \in S_1 \cap S_2$?

$v \in S_1 \cap S_2 \therefore v \in S_1$ e $v \in S_2$

Então, $k \cdot v \in S_1$ e $k \cdot v \in S_2$.

Logo, $k \cdot v \in S_1 \cap S_2$.

Exemplos:

1) Sejam $S_1 = \{(x,0,0), \text{com } x \in \mathbf{R}\}$ e $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = x + z\}$.

$S_1 \cap S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x,y,z) \in S_1 \text{ e } (x,y,z) \in S_2\}$.

Assim, $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ y = x + z \end{cases}$

Logo, $S_1 \cap S_2 = \{(0,0,0)\}$.

Geometricamente, tem-se uma reta e um plano no $\mathbf{R}^3$ que se interceptam na origem.

2) Sejam $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = 3x\}$ e $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$.

$S_1 \cap S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = 3x \text{ e } 2x - y + 3z = 0\}$.

Assim, $\begin{cases} -3x + y = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, $S_1 \cap S_2 = \{(3z, 9z, z), z \in \mathbf{R}\}$, ou seja, $S_1 \cap S_2 = \{z \cdot (3,9,1), z \in \mathbf{R}\}$.

Geometricamente, a interseção é representada por uma reta que passa pelos pontos (0,0,0) e (3,9,1).

2. **Soma**

Sejam S_1 e S_2 subespaços do espaço vetorial real *V*.

O conjunto soma de S_1 e S_2, $S_1 + S_2 = \{v \in V \mid v = s_1 + s_2, \text{com}\, s_1 \in S_1 \text{ e } s_2 \in S_2\}$, é também um subespaço vetorial de V.

Exemplos:

1) Sejam $S_1 = \{(x,0,0), x \in \mathbf{R}\}$ e $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = x + z\}$.

$S_1 + S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x,y,z) = s_1 + s_2, \text{com}\, s_1 \in S_1 \text{ e } s_2 \in S_2\}$.

Tem-se que, $(x,0,0) \in S_1$ e $(x, x+z, z) \in S_2$, para quaisquer $x, z \in \mathbf{R}$.

Mas, $x \cdot (1,0,0) \in S_1$ e $x \cdot (1,1,0) + z \cdot (0,1,1) \in S_2$, para quaisquer $x, z \in \mathbf{R}$.

Assim, $\{(1,0,0)\}$ é base do subespaço S_1 e $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ é uma base do subespaço S_2.

Então, $(x,y,z) \in S_1 + S_2$ quando $(x,y,z) = k_1 \cdot (1,0,0) + k_2 \cdot (1,1,0) + k_3 \cdot (0,1,1)$.

Assim, $\begin{cases} k_1 + k_2 = x \\ k_2 + k_3 = y \\ k_3 = z \end{cases}$

Sistema possível, logo $S_1 + S_2 = \mathbf{R}^3$.

2) Sejam $S_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid x - y - t = 0\}$ e $S_2 = \{(0,0,z,0), z \in \mathbf{R}\}$.

$S_1 + S_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid (x,y,z,t) = s_1 + s_2, \text{com}\, s_1 \in S_1 \text{ e } s_2 \in S_2\}$.

Tem-se que, $(y+t, y, z, t) \in S_1$ e $(0,0,z,0) \in S_2$, para quaisquer $y, z, t \in \mathbf{R}$.

Mas, $y \cdot (1,1,0,0) + z \cdot (0,0,1,0) + t \cdot (1,0,0,1) \in S_1$ e $z \cdot (0,0,1,0) \in S_2$, para quaisquer $y, z, t \in \mathbf{R}$.

$(x,y,z,t) \in S_1 + S_2$ quando $(x,y,z,t) = k_1 \cdot (1,1,0,0) + k_2 \cdot (0,0,1,0) + k_3 \cdot (1,0,0,1) + k_4 \cdot (0,0,1,0)$

Assim, $\begin{cases} k_1 + k_3 = x \\ k_1 = y \\ k_2 + k_4 = z \\ k_3 = t \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & -1 & 0 & y - x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t + y - x \end{pmatrix}$$

Para que o sistema seja possível é necessário que $t + y - x = 0$.

Então, $S_1 + S_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid t + y - x = 0\}$.

Seja *V* um espaço vetorial *n*-dimensional. Se S_1 e S_2 são subespaços de *V* então:

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$

Este resultado é conhecido como **Teorema da Dimensão**.

3. **Soma Direta**

Sejam S_1 e S_2 subespaços do espaço vetorial real V.

A soma de S_1 e S_2 é denominada soma direta quando $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}_V\}$.

Notação: $S_1 \oplus S_2$

Coordenadas de um Vetor em relação a uma Base Ordenada

Seja V é um espaço vetorial n-dimensional, qualquer conjunto LI com n vetores é uma base de V.
Ao se escolher uma base para o espaço vetorial V, está-se adotando um sistema referencial no qual pode-se expressar qualquer vetor de V.
Considere $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq V$ uma base, qualquer vetor $v \in V$ pode ser expresso de maneira única como combinação linear dos vetores da base A,

$$v = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n$$

onde $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbf{R}$ são as **coordenadas do vetor *v* em relação a base ordenada *A***.

Notação: $v_A = (k_1, k_2, ..., k_n)$ e na forma matricial $[v]_A = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ ... \\ k_n \end{pmatrix}$.

Toda vez que a expressão “coordenadas em relação a uma base” é utilizada, uma base ordenada está sendo considerada.

Exemplos: O vetor $v = (1,2)$ pode ser escrito:

1) Considerando a base canônica do $\mathbf{R}^2$.

   $(1,2) = 1 \cdot (1,0) + 2 \cdot (0,1)$ ou seja $[v] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2) Considerando a base $A = \{(1,1), (-1,0)\}$.

   $(1,2) = k_1 \cdot (1,1) + k_2 \cdot (-1,0)$

   Assim, $\begin{cases} k_1 - k_2 = 1 \\ k_1 + 0k_2 = 2 \end{cases}$

   Logo, $k_1 = 2$ e $k_2 = 1$.

   Portanto, $(1,2) = 2 \cdot (1,1) + 1 \cdot (-1,0)$ e $[v]_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Matriz de Transição de uma Base para uma outra Base

Que relação existe entre as coordenadas de um vetor no antigo referencial e em um novo referencial? Uma matriz permitirá a relação entre estes referenciais, as bases do espaço vetorial. Esta matriz é denominada **matriz de transição** ou **matriz mudança de base**.

O desenvolvimento a seguir considera duas bases do $\mathbf{R^2}$, no entanto o mesmo raciocínio pode ser utilizado para qualquer espaço vetorial *V* *n*-dimensional.

Sejam $A = \{u_1, u_2\}$ e $B = \{w_1, w_2\}$ bases do $\mathbf{R^2}$.

Para qualquer $v \in \mathbf{R}^2$, tem-se:

$$v = a \cdot u_1 + b \cdot u_2 \qquad (1)$$

isto é, $[v]_A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Como u_1 e u_2 são vetores do $\mathbf{R^2}$, podem ser escritos como combinação linear dos vetores da base *B*.

$$\begin{cases} u_1 = a_{11} \cdot w_1 + a_{21} \cdot w_2 \\ u_2 = a_{12} \cdot w_1 + a_{22} \cdot w_2 \end{cases} \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$v = a \cdot (a_{11} \cdot w_1 + a_{21} \cdot w_2) + b \cdot (a_{12} \cdot w_1 + a_{22} \cdot w_2)$$

$$v = (a \cdot a_{11} + b \cdot a_{12}) \cdot w_1 + (a \cdot a_{21} + b \cdot a_{22}) \cdot w_2$$

Portanto, $a \cdot a_{11} + b \cdot a_{12}$ e $a \cdot a_{21} + b \cdot a_{22}$ são as coordenadas de *v* em relação à base *B*.

Assim, $[v]_B = \begin{pmatrix} a \cdot a_{11} + b \cdot a_{12} \\ a \cdot a_{21} + b \cdot a_{22} \end{pmatrix}$.

Podendo ser rescrito como, $[v]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

A matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ acima é denotada por $[I]_B^A$ sendo denominada a matriz de transição da base *A* para a base *B*.

As colunas da matriz $[I]_B^A$ são as coordenadas dos vetores da base *A* em relação à base *B*.

Obtém-se a equação matricial, $[v]_B = [I]_B^A \cdot [v]_A$.

Analogamente, $[v]_A = [I]_A^B \cdot [v]_B$ para mudança da base *B* para a base *A*.

Observe que, $[v]_B = [I]_B^A \cdot [v]_A$.

Como, $[v]_A = [I]_A^B \cdot [v]_B$.

Tem-se que, $[v]_B = [I]_B^A \cdot [I]_A^B \cdot [v]_B$.

Como, $[v]_B = I_n \cdot [v]_B$.

Então, $I_n = [I]_B^A \cdot [I]_A^B$.

Logo, $[I]_B^A = ([I]_A^B)^{-1}$.

Exercícios

1) Verifique se $\mathbf{R^2}$ é um espaço vetorial, para as operações definidas abaixo.

a) $(x,y)+(z,t)=(x-z,y-t)$
$k\cdot(x,y)=(-kx,-ky)$

b) $(x,y)+(z,t)=(x+z,y+t)$
$k\cdot(x,y)=(kx,0)$

c) $(x,y)+(z,t)=(x+z,y+t)$
$k\cdot(x,y)=(2kx,2ky)$

d) $(x,y)+(z,t)=(0,0)$
$k\cdot(x,y)=(kx,ky)$

e) $(x,y)+(z,t)=(xz,yt)$
$k\cdot(x,y)=(kx,ky)$

f) $(x,y)+(z,t)=(x+z+1,y+t+1)$
$k\cdot(x,y)=(kx,ky)$

g) $(x,y)+(z,t)=(x+z,y+t)$
$k\cdot(x,y)=(kx,y)$

2) Considere o conjunto $Fun(\mathbf{R})$ de todas as funções $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. Definem-se duas operações binárias $+: Fun(\mathbf{R})\times Fun(\mathbf{R})\to Fun(\mathbf{R})$ tal que $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ e $\cdot:\mathbf{R}\times Fun(\mathbf{R})\to Fun(\mathbf{R})$ tal que $(k\cdot f)(x)=k\cdot f(x)$.
Estas operações definem um espaço vetorial?

3) Verifique se os seguintes subconjuntos são subespaços de $\mathbf{R^3}$.
a) $S=\{(x,y,z)\in\mathbf{R^3}\mid z=3\}$
b) $S=\{(x,y,z)\in\mathbf{R^3}\mid x^2=y\}$
c) $S=\{(x,y,z)\in\mathbf{R^3}\mid x=2y\}$
d) $S=\{(x,y,z)\in\mathbf{R^3}\mid x>0\}$
e) $S=\{(x,y,z)\in\mathbf{R^3}\mid y=x+z\}$
f) $S=\{(0,y,y), y\in\mathbf{R}\}$

4) Verifique se o conjunto solução do sistema $\begin{cases} x-y+z=2\\ 2x+4y-z=0\\ x-2y-z=1\end{cases}$ é um subespaço vetorial de $\mathbf{R}^3$.

5) Escreva $u=(1,-2)$ como combinação linear de $(1,2)$ e $(0,3)$.

6) O vetor $v=(-2,1,0)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores (1,2,0) e (0,1,0)?

7) Escreva $p(x)=x^2+x-1$ como combinação linear de $q(x)=x^2-2x$ e $r(x)=2x^2-\dfrac{4}{3}$.

8) O conjunto $\{(-1,2),(0,1),(3,1)\}$ gera o $\mathbf{R}^2$?

9) Determine a equação do plano gerado pelos vetores $(-1,2,0),(0,1,2)$ e $(-2,5,2)$.

10) Verifique se os conjuntos abaixo são LI ou LD.
   a) $\{(1,0,0),(1,3,5),(3,2,5)\}$
   b) $\{(1,2,-1),(0,0,1),(1,-2,3),(3,0,1)\}$
   c) $\{(1,2),(3,5),(2,1)\}$
   d) $\{(1,0,2),(0,-1,3),(0,0,2)\}$
   e) $\{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$

11) Mostre que se $\{u,v,w\} \subseteq V$ é LI então $\{u+v, u+w, v+w\}$ também é um conjunto LI.

12) Complete com V(erdadeiro) ou F(also).
( ) $[(1,2,0),(2,4,0)]$ é um plano no $\mathbf{R}^3$ que passa pela origem.
( ) $[(1,2,0),(2,3,0)]$ é um plano no $\mathbf{R}^3$ que passa pela origem.
( ) $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq V$ é LD quando pelo menos um destes vetores é combinação linear dos demais.
( ) $\{(-1,2,3),(0,1,2),(-1,1,1)\}$ gera o $\mathbf{R}^3$.
( ) O conjunto $\{(1,2,3),(0,0,0),(2,3,5)\}$ é LI.
( ) Se $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq V$ é LI então qualquer um dos seus subconjuntos também é LI.
( ) Se todo subconjunto próprio de $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq V$ é LI então $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é LI.
( ) $[(1,2)]$ possui somente duas bases $\{(1,2)\}$ e $\{(2,4)\}$.
( ) $\{(1,0,4),(7,8,0)\}$ é base de $[(1,0,4),(7,8,0)]$.
( ) Todo conjunto LI de vetores é uma base de seu subespaço gerado.
( ) $\{(3,5),(0,0)\}$ é base do $\mathbf{R}^2$.
( ) $\{(2,3),(4,5),(7,9)\}$ gera o $\mathbf{R}^2$ então $\{(2,3),(4,5)\}$, $\{(2,3),(7,9)\}$ e $\{(4,5),(7,9)\}$ são bases do $\mathbf{R}^2$.
( ) Se $[v_1, v_2, v_3, v_4] = \mathbf{R}^3$ então quaisquer três vetores deste conjunto formam uma base do $\mathbf{R}^3$.
( ) Um conjunto com três vetores do $\mathbf{R}^3$ é base do $\mathbf{R}^3$.
( ) Um conjunto com mais do que três vetores do $\mathbf{R}^3$ não será uma base do $\mathbf{R}^3$.
( ) $\{(1,2,3),(2,-1,3)\}$ é base do $\mathbf{R}^2$.
( ) Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos.
( ) $\{(2,3),(x,y)\}$ é base do $\mathbf{R}^2$ quando $(x,y) \notin [(2,3)]$.
( ) Sejam V um espaço vetorial n-dimensional e o conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\} \subseteq V$ LI.
Então $\{v_1, v_2, ..., v_{n-1}, v\}$ é base de V qualquer que seja o vetor $v \in V$.
( ) Se $\dim V = n$ então qualquer conjunto LI com n vetores é uma base de V.
( ) $\{(0,1,2),(1,0,1)\}$ gera $\mathbf{R}^2$.
( ) Todo conjunto gerador de um espaço vetorial V é uma base para V.
( ) Se $S = [(1,0,-1),(2,1,3),(1,1,4)]$ então $\dim S = 3$.

13) Para que valores de k os vetores $(1,2,0,k),(0,-1,k,1),(0,2,1,0)$ e $(1,0,2,3k)$ geram um espaço tridimensional ?

14) Determine uma base e a dimensão dos seguintes subespaços de $\mathbf{R}^3$.
   a) $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = 2y \text{ e } z = y\}$
   b) $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$
   c) $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = 0 \text{ e } x + z = 0\}$

15) Encontre uma base e a dimensão para o conjunto solução do sistema $\begin{cases} x+2y-2z-t=0 \\ 2x+4y+z+t=0 \\ x+2y+3z+2t=0 \end{cases}$.

16) Mostre que a soma de subespaços é também um subespaço.

17) Determine o subespaço interseção e o subespaço soma para os casos abaixo, indicando quando a soma é direta.

a) $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R^3} \mid x-2y+z=0\}$ e $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R^3} \mid x+3y=0\}$

b) $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R^3} \mid x=y\}$ e $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R^3} \mid x+y+z=0\}$

19) Sejam $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R^3} \mid y=0\}$ e $S_2 = [(-1,2,0),(3,1,1)]$. Determine $S_1 \cap S_2$ e $S_1 + S_2$, indicando uma base e a dimensão em cada um dos casos.

20) Seja $v=(1,2,3)$ e a base $A=\{(1,0,3),(-1,7,5),(2,-1,6)\}$. Indique $[v]_A$.

21) Considere $A=\{(1,1,1),(0,2,3),(0,2,-1)\}$ uma base para o $\mathbf{R^3}$. Encontre as coordenadas de $v=(3,5,-2)$ em relação a esta base.

22) Seja $A=\{(-1,1,1),(0,2,3),(0,0,-1)\}$ e $(v)_A=(-2,0,3)$. Determine *v*.

23) Sendo $A=\{(-3,-1),(2,0)\}$ uma base para o $\mathbf{R^2}$ e $[v]_A=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$. Encontre:

a) As coordenadas de *v* na base canônica.

b) As coordenadas de *v* na base $B=\{(2,1),(1,5)\}$.

24) Encontre as coordenadas do vetor $v=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{pmatrix} \in Mat_{2\times2}(\mathbf{R})$ em relação à base $B=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & -2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 3\\0 & 0\end{pmatrix}\right\}$.

25) Dadas as bases do $\mathbf{R^3}$, $A=\{(-1,0,2),(0,1,0),(0,0,2)\}$ e $B=\{(0,0,1),(0,-2,1),(1,0,-1)\}$.

a) Determine $[I]_B^A$.

b) Considere $[v]_A=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$. Calcule $[v]_B$.

26) Considere as bases $A=\{(-3,0,3),(-3,2,-1),(1,6,-1)\}$ e $B=\{(-6,-6,0),(-2,-6,4),(-2,-3,7)\}$.

a) Achar a matriz mudança de base de *B* para *A*.

b) Dado $v=(-5,8,-5)$, calcule $[v]_A$.

27) Seja $[I]_B^A=\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & -3\end{pmatrix}$ e $B=\{(1,-2),(2,0)\}$. Determine a base *A*.

28) Seja $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ a matriz mudança de base de B para A. Determinar a base A, sabendo que $B = \{(1,-1),(0,1)\}$.

29) Sabendo que $A = \{u_1, u_2\}$ e $B = \{w_1, w_2\}$ são bases do $\mathbf{R}^2$ tais que: $[v]_A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_1 = u_1 - u_2$ e $w_2 = 2 \cdot u_1 - 3 \cdot u_2$, determine $[v]_B$.

30) Considere $A = \{(1,1,1),(0,2,3),(0,2,-1)\}$ e $B = \{(1,1,0),(1,-1,0),(0,0,1)\}$. Determine as matrizes mudança de base.

Respostas

1) Nenhum é espaço vetorial.

3) a)b)d) Não
c)e)f) Sim

4) Não

5) $(1,-2) = 1 \cdot (1,2) + (-\frac{4}{3}) \cdot (0,3)$

6) Sim, $k_1 = -2$ e $k_2 = 5$

7) $p(x) = (-\frac{1}{2}) \cdot q(x) + \frac{3}{4} \cdot r(x)$

9) $4x + 2y - z = 0$

10) a)d)e) LI
b)c) LD

12) F,V,V,F,F,V,F,F,V,V,
F,V,F,F,V,F,V,V,F,V,
F,F,F

13) $k = 1$ ou $k = -\frac{3}{2}$

14) a) base : $\{(2,1,1)\}$ e $\dim = 1$
b) base : $\{(-2,1,0),(1,0,1)\}$ e $\dim = 2$
c) base : $\{(1,0,1\}$ e $\dim = 1$

15) base : $\{(-2,1,0,0),(-\frac{1}{5},0,-\frac{3}{5},1)\}$
$\dim = 2$

18) a) $S_1 \cap S_2 = \{(-3y, y, 5y), y \in \mathbf{R}\}$
$S_1 + S_2 = \mathbf{R}^3$
b) $S_1 \cap S_2 = \{(y, y, -2y), y \in \mathbf{R}\}$
$S_1 + S_2 = \mathbf{R}^3$
Nenhum é soma direta.

19) $S_1 \cap S_2 = \{(\frac{7}{2}z, 0, z), z \in \mathbf{R}\}$
base : $\{(7,0,2)\}$ e $\dim = 1$
$S_1 + S_2 = \mathbf{R}^3$
base : $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $\dim = 3$

20) $[v]_A = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

21) $(v)_A = (3,-1,2)$

22) $v = (2,-2,-5)$

23) a) $[v] = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $[v]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

24) $[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

25) a) $[I]_B^A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $[v]_B = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

26) a) $[I]_A^B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{9} & \frac{17}{9} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$ b) $[v]_A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

27) $A = \{(1,-2),(-8,4)\}$

28) $A = \{(1,-1),(-\frac{2}{3},1)\}$

29) $[v]_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

30) $[I]_B^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ e $[I]_A^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Apêndice B – Teoremas

Teo1. O elemento neutro é único.
Demonstração por Redução ao Absurdo (RAA)

Supondo que o elemento neutro não é único, isto é, existem $\mathbf{0}_V, \mathbf{0}'_V \in V$, $\mathbf{0}_V \neq \mathbf{0}'_V$ ambos elementos neutros.

$\mathbf{0}_V + \mathbf{0}'_V = \mathbf{0}_V$ por EV3, $\mathbf{0}'_V$ é elemento neutro à direita.

$\mathbf{0}_V + \mathbf{0}'_V = \mathbf{0}'_V$ por EV3, $\mathbf{0}_V$ é elemento neutro à esquerda.

Então, $\mathbf{0}_V = \mathbf{0}'_V$. Contradição.

Logo, só existe um elemento neutro para a operação de adição em V.

Teo2. (**Lei do Corte** ou **Lei do Cancelamento**)

Para quaisquer $v, u, w \in V$, se $v + u = v + w$ então $u = w$.

dem.: Por hipótese, $v + u = v + w$.

Pelo axioma EV4, $(-v) + (v + u) = (-v) + (v + w)$.

Por EV1, $((-v) + v) + u = ((-v) + v) + w$.

Por EV4, $\mathbf{0}_V + u = \mathbf{0}_V + w$.

Por EV3, $u = w$.

Teo3. O elemento simétrico é único.

Teo4. Para quaisquer $v, u \in V$, se $v + u = v$ então $u = \mathbf{0}_V$.

dem.: Por hipótese, $v + u = v$.

Pelo axioma EV3, $v + \mathbf{0}_V = v$.

Assim, $v + u = v + \mathbf{0}_V$.

Pela Lei do Corte, $u = \mathbf{0}_V$.

Teo5. Para quaisquer $v, u \in V$, se $v + u = \mathbf{0}_V$ então $u = -v$.

Teo6. Para todo $v \in V$, $0 \cdot v = \mathbf{0}_V$.

dem.: Considere o vetor $v + 0 \cdot v \in V$.

$v + 0 \cdot v =$	por EV8.
$1 \cdot v + 0 \cdot v =$	por EV6.
$(1 + 0) \cdot v =$	0 é o elemento neutro da adição em **R**.
$1 \cdot v =$	por EV8.
$v =$	por EV3.
$v + \mathbf{0}_V$	

Assim, $v + 0 \cdot v = v + \mathbf{0}_V$.

Pela Lei do Corte, $0 \cdot v = \mathbf{0}_V$.

Teo7. Para todo $k \in \mathbf{R}$, $k \cdot \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$.

dem.: Considere o vetor $k \cdot \mathbf{0}_V + k \cdot \mathbf{0}_V \in V$.

$k \cdot \mathbf{0}_V + k \cdot \mathbf{0}_V =$	por EV6.
$k \cdot (\mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V) =$	por EV3.
$k \cdot \mathbf{0}_V =$	por EV3.
$k \cdot \mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V$	

Assim, $k \cdot \mathbf{0}_V + k \cdot \mathbf{0}_V = k \cdot \mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V$.

Pela Lei do Corte, $k \cdot \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$.

Teo8. Para todo $v \in V, v \neq \mathbf{0}_V$ e para todo $k \in \mathbf{R}, k \neq 0$, $k \cdot v \neq \mathbf{0}_V$.

dem.: (RAA) Supondo que $v \neq \mathbf{0}_V$, $k \neq 0$ e $k \cdot v = \mathbf{0}_V$

$v =$	por EV8.
$1 \cdot v =$	por hipótese e pela existência de elemento inverso em **R**.
$\left(\frac{1}{k}k\right) \cdot v =$	por EV5.
$\frac{1}{k} \cdot (k \cdot v) =$	por hipótese.
$\frac{1}{k} \cdot \mathbf{0}_V =$	pela Teo5.
$\mathbf{0}_V$	

Assim, $v = \mathbf{0}_V$. Contradição.

Logo, $k \cdot v \neq \mathbf{0}_V$.

Corolário8. Para todo $v \in V$ e para todo $k \in \mathbf{R}$, se $k \cdot v = \mathbf{0}_V$ então $k = 0$ ou $v = \mathbf{0}_V$.

Teo9. Para todo $v \in V$, $(-1) \cdot v = -v$.

dem.: Considere o vetor $v + (-1) \cdot v \in V$.

$v + (-1) \cdot v =$	por EV8.
$1 \cdot v + (-1) \cdot v =$	por EV6.
$(1 + (-1)) \cdot v =$	0 é o elemento neutro da adição em **R**.
$0 \cdot v =$	por EV8.
$\mathbf{0}_V$	

Assim, $v + (-1) \cdot v = \mathbf{0}_V$.

Então, $v + (-1) \cdot v = v + (-v)$

Pela Lei do Corte, $(-1) \cdot v = -v$.

Teo10. Para todo $v \in V$ e para todo $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, $n \cdot v = v + v + ... + v$ (soma com *n* parcelas).

Demonstração usando indução em *n*.

Base: Para $k = 1$.

Por EV8, $1 \cdot v = v$.

Passo: (Hipótese de Indução) Supor que vale a igualdade para $k \in \mathbf{N}, k > 1$, isto é, $k \cdot v = \underbrace{v + v + ... + v}_{k \text{ parcelas}}$.

Vale a igualdade para $k + 1$?

$(k+1) \cdot v =$	por EV6.
$k \cdot v + 1 \cdot v =$	por EV8.
$k \cdot v + v =$	por hipótese de indução.
$\underbrace{(v + v + ... + v)}_{k \text{ parcelas}} + v =$	por EV1.
$\underbrace{v + v + ... + v}_{(k+1) \text{ parcelas}}$	

Assim, $(k+1)\cdot v = \underbrace{v+v+...+v}_{(k+1)\text{ parcelas}}$.

Logo, vale a igualdade para todo $n \in \mathbf{N} - \{0\}$.

Teo11. Todo subespaço vetorial é um espaço vetorial.

Teo12. Se $\{v_1, v_2,..., v_r\} \subseteq V$ então $[v_1, v_2,..., v_r]$ é um subespaço vetorial de *V*.

Teo13. Sejam $\{v_1, v_2,..., v_r\} \subseteq V$ e $v \in V$. Se *v* é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2,..., v_r$ então $[v_1, v_2,..., v_r, v] = [v_1, v_2,..., v_r]$.

dem.: $(\subseteq)$ $[v_1, v_2,..., v_r, v] \subseteq [v_1, v_2,..., v_r]$?

$v = k_1 \cdot v_1 + ... + k_r \cdot v_r$ com $k_1,..., k_r \in \mathbf{R}$. (1)

Seja $u \in [v_1,..., v_r, v]$ qualquer.

Então $u = l_1 \cdot v_1 + ... + l_r \cdot v_r + l_{r+1} \cdot v$ com $l_1,..., l_{r+1} \in \mathbf{R}$. (2)

Substituindo (1) em (2),

$u = l_1 \cdot v_1 + ... + l_r \cdot v_r + l_{r+1} \cdot (k_1 \cdot v_1 + ... + k_r \cdot v_r) =$ por EV7.

$= l_1 \cdot v_1 + ... + l_r \cdot v_r + (l_{r+1} \cdot (k_1 \cdot v_1) + ... + l_{r+1} \cdot (k_r \cdot v_r)) =$ por EV5 e EV1

$= l_1 \cdot v_1 + ... + l_r \cdot v_r + (l_{r+1}k_1) \cdot v_1 + ... + (l_{r+1}k_r) \cdot v_r =$ por EV2

$= l_1 \cdot v_1 + (l_{r+1}k_1) \cdot v_1 + ... + l_r \cdot v_r + (l_{r+1}k_r) \cdot v_r =$ por EV6

$= (l_1 + l_{r+1}k_1) \cdot v_1 + ... + (l_r + l_{r+1}k_r) \cdot v_r =$ pelo fechamento da multiplicação e da adição em **R**.

$= m_1 \cdot v_1 + ... + m_r \cdot v_r$ com $m_1,..., m_{r+1} \in \mathbf{R}$.

Assim, $u = m_1 \cdot v_1 + ... + m_r \cdot v_r$ com $m_1,..., m_{r+1} \in \mathbf{R}$.

Logo, $u \in [v_1,..., v_r]$.

$(\supseteq)$ $[v_1, v_2,..., v_r] \subseteq [v_1, v_2,..., v_r, v]$ (exercício)

Teo14. Sejam $\{v_1, v_2,..., v_r\} \subseteq V$ e $\{u_1, u_2,..., u_s\} \subseteq V$. $[v_1, v_2,..., v_r] = [u_1, u_2,..., u_s]$ se e somente se cada um dos vetores do conjunto $\{v_1, v_2,..., v_r\}$ é uma combinação linear dos vetores $u_1, u_2,..., u_s$ e cada um dos vetores do conjunto $\{u_1, u_2,..., u_s\}$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2,..., v_r$.

Teo15. Seja $v \in V, v \neq \mathbf{0}_V$, $\{v\}$ é linearmente independente.

Teo16. Seja $\{v_1, v_2,..., v_r\} \subseteq V$. Se $v_i = \mathbf{0}_V$, para algum $i = 1,..., r$ então $\{v_1, v_2,..., v_r\}$ é linearmente dependente.

dem.: $k_1 \cdot v_1 + ... + k_i \cdot \mathbf{0}_V + ... + k_r \cdot v_r = \mathbf{0}_V$

Para qualquer $k_i \in \mathbf{R}$, $k_i \cdot \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$.

Logo, o conjunto $\{v_1, v_2,..., v_r\}$ é LD.

Teo17. Seja $\{v_1, v_2,..., v_r\} \subseteq V$. O conjunto $\{v_1, v_2,..., v_r\}$ é linearmente dependente se e somente se pelo menos um destes vetores é combinação linear dos demais.

dem.: $(\rightarrow)$ Considere $\{v_1, v_2,..., v_r\}$ linearmente dependente.

$k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_i \cdot v_i + ... + k_r \cdot v_r = \mathbf{0}_V$

Então existe um $k_i \in \mathbf{R}$, $k_i \neq 0$, com $i \in [1, r]$.

Pelo EV4 e o Teo7,

$(-k_i) \cdot v_i = k_1 \cdot v_1 + ... + k_{i-1} \cdot v_{i-1} + k_{i+1} \cdot v_{i+1} + ... + k_r \cdot v_r$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $\left(-\dfrac{1}{k_i}\right) \in \mathbf{R}$,

$$\left(-\frac{1}{k_i}\right)\cdot((-k_i)\cdot v_i) = \left(-\frac{1}{k_i}\right)\cdot(k_1\cdot v_1 + ... + k_{i-1}\cdot v_{i-1} + k_{i+1}\cdot v_{i+1} + ... + k_r\cdot v_r)$$

Por EV5, EV7 e propriedades em **R**,

$$\left(-\frac{(-k_i)}{k_i}\right)\cdot v_i = \left(-\frac{1}{k_i}\right)\cdot(k_1\cdot v_1) + ... + \left(-\frac{1}{k_i}\right)\cdot(k_{i-1}\cdot v_{i-1}) + \left(-\frac{1}{k_i}\right)\cdot(k_{i+1}\cdot v_{i+1}) + ... + \left(-\frac{1}{k_i}\right)\cdot(k_r\cdot v_r)$$

Por EV5,

$$1\cdot v_i = \left(-\frac{1}{k_i}\right)\cdot(k_1\cdot v_1) + ... + \left(-\frac{1}{k_i}\right)\cdot(k_{i-1}\cdot v_{i-1}) + \left(-\frac{1}{k_i}\right)\cdot(k_{i+1}\cdot v_{i+1}) + ... + \left(-\frac{1}{k_i}\right)\cdot(k_r\cdot v_r)$$

Por EV8 e propriedades em **R**,

$$v_i = \left(-\frac{k_1}{k_i}\right)\cdot v_1 + ... + \left(-\frac{k_{i-1}}{k_i}\right)\cdot v_{i-1} + \left(-\frac{k_{i+1}}{k_i}\right)\cdot v_{i+1} + ... + \left(-\frac{k_r}{k_i}\right)\cdot v_r$$

Assim, $v_i = m_1\cdot v_1 + ... + m_{i-1}\cdot v_{i-1} + m_{i+1}\cdot v_{i+1} + ... + m_r\cdot v_r$

Logo, v_i, com $i \in [1, r]$, é combinação linear dos demais vetores.

($\leftarrow$) Seja o vetor $v_i \in \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ tal que $v_i = k_1\cdot v_1 + ... + k_{i-1}\cdot v_{i-1} + k_{i+1}\cdot v_{i+1} + ... + k_r\cdot v_r$.

$k_1\cdot v_1 + ... + k_{i-1}\cdot v_{i-1} + (-1)\cdot v_i + k_{i+1}\cdot v_{i+1} + ... + k_r\cdot v_r = \mathbf{0}_V$.

Então, $k_i = (-1) \neq 0$.

Logo, $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é linearmente dependente.

Corolário17. Sejam $\{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq V$ e $v \in V$. Se $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é linearmente independente e $\{v_1, v_2, ..., v_r, v\}$ é linearmente dependente então *v* é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, ..., v_r$.

dem.: $\{v_1, v_2, ..., v_r, v\}$ é LD.

Pelo Teo17, pelo menos um destes vetores é combinação linear dos demais.

Mas, $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é LI.

Logo, este vetor é o vetor *v*.

Teo18. Seja $S \subset \{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq V$ tal que $S \neq \varnothing$. Se *S* é linearmente dependente então $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é linearmente dependente.

dem.: Seja $S \subseteq \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ qualquer.

$S = \{v_{S_1}, ..., v_{S_p}\}$ com $v_{S_i} \in \{v_1, ..., v_r\}$ para todo $i = 1, ..., p$.

S é LD.

Pela Teo17, existe $v_{S_j} \in S$ que é combinação linear dos demais vetores de *S*.

Mas, $v_{S_j} \in S \subseteq \{v_1, ..., v_r\}$.

Então, $v_{S_j} \in \{v_1, ..., v_r\}$ que é combinação linear destes vetores.

Logo, $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é LD.

Teo19. Sejam $\{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq V$ um conjunto linearmente independente e $k_1, ..., k_r, l_1, ..., l_r \in \mathbf{R}$.
Se $k_1 \cdot v_1 + ... + k_r \cdot v_r = l_1 \cdot v_1 + ... + l_r \cdot v_r$ então $k_i = l_i$, para todo $i = 1, ..., r$.

Corolário19. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq V$. Se $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma base de *V* então todo vetor $v \in V$ pode ser escrito de forma única como combinação linear dos vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ da base.

Teo20. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq V$. O conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é linearmente independente se e somente se nenhum destes vetores é combinação linear dos demais.

Corolário20a. Seja $\{v, u\} \subseteq V$. O conjunto $\{v, u\}$ é linearmente independente se e somente se um vetor não é múltiplo escalar do outro.

Corolário20b. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq V$ um conjunto linearmente independente e $v \in V$.
Se $v \notin [v_1, v_2, ..., v_r]$ então $\{v_1, v_2, ..., v_r, v\}$ é um conjunto linearmente independente.

Teo21. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq V$. Se $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é linearmente independente então qualquer um de seus subconjuntos é linearmente independente.

Teo22. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq V$. Se $[v_1, v_2, ..., v_r] = V$ então existe uma base *A* de *V* tal que $A \subseteq \{v_1, v_2, ..., v_r\}$.

dem.: Se $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é LI então $A = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é uma base de *V*.
Se $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é LD,
Então, pelo Teo17, existe $v_i \in \{v_1, v_2, ..., v_r\}$, com $i \in [1, r]$, tal que: $v_i \in [v_1, v_2, ..., v_r]$.
Pelo Teo13, $[v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ... v_r] = [v_1, v_2, ..., v_r]$.
Como, por hipótese, $[v_1, v_2, ..., v_r] = V$.
Assim, $[v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ... v_r] = V$.
Se $\{v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ... v_r\}$ é LI então $A = \{v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ... v_r\}$ é uma base de *V*.
Caso contrário este processo continua até a obtenção de um certo conjunto $A \subseteq \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ LI e tal que $[A] = V$.
Assim, *A* é uma base do espaço vetorial *V*.

Corolário22a. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq V$. Se $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ gera o espaço vetorial *V* então qualquer conjunto de vetores de *V* com mais do que *r* elementos é linearmente dependente.

Corolário22b. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq V$.
Se $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ gera *V* então qualquer conjunto de vetores de *V* linearmente independente tem no máximo *r* elementos.

Teo23. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq V$. Se $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é linearmente independente então pode-se estender o conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ a um conjunto *B* base de *V*.

dem.: Se $[v_1, v_2, ..., v_r] = V$ então $B = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é uma base de *V*.
Se $[v_1, v_2, ..., v_r] \subset V$,
Então, seja $v \in V$ tal que $v \notin [v_1, v_2, ..., v_r]$.
Pelo Corol20b, $\{v_1, v_2, ..., v_r, v\}$ é LI.
Se $[v_1, v_2, ..., v_r, v] = V$ então $B = \{v_1, v_2, ..., v_r, v\}$ é uma base de *V*.

Caso contrário este processo continua até a obtenção de um certo conjunto B tal que $\{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq B$, B é LI e $[B] = V$.
Assim, B é uma base do espaço vetorial V.

Teo24. Sejam $\dim V = n$ e $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq V$. O conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma base de V se é linearmente independente ou se gera o espaço vetorial V.

Teo25. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base do espaço vetorial V e $\{u_1, u_2, ..., u_m\} \subseteq V$.
i) Se $m > n$ então o conjunto $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ é linearmente dependente.
ii) Se $m < n$ então o conjunto $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ não gera o espaço vetorial V.

Teo26. Todas as bases de um espaço vetorial possuem o mesmo número de vetores.

Teo27. Para quaisquer subespaços vetoriais S e U de V, $S \cap U \neq \varnothing$ e $S + U \neq \varnothing$.
dem.: $S \leq V \therefore \mathbf{0}_V \in S$.
$U \leq V \therefore \mathbf{0}_V \in U$.
Assim, $\mathbf{0}_V \in S \cap U$ e $\mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V \in S + U$.
Logo, $S \cap U \neq \varnothing$ e $S + U \neq \varnothing$.

Teo28. Para quaisquer subespaços vetoriais S e U de V, $S \cap U$ é um subespaços vetorial de V.

Teo29. Para quaisquer subespaços vetoriais S e U de V, $S + U$ é um subespaço vetorial de V.

Teo30. Seja S é um subespaço vetorial de V tal que $S \neq \{\mathbf{0}_V\}$. Então $\dim S \leq \dim V$.

Teo31. Se V é a soma direta dos subespaços vetoriais S e U então todo vetor $v \in V$ é escrito de maneira única na forma $v = s + u$, com $s \in S$ e $u \in U$.
dem.: (escrita)
Como $V = S + U$
Então, para todo $v \in V, v = s + u$ para algum $s \in S$ e $u \in U$.
(unicidade) (RAA)
Supondo que existam $s, s' \in S, s \neq s'$ e $u, u' \in U, u \neq u'$ tais que $v = s + u$ e $v = s' + u'$.
Assim, $s + u = s' + u'$.
Pelas propriedades do EV, $s + (-s') = u' + (-u)$.
Como $S \leq V$, $s + (-s') \in S$, e, analogamente, como $U \leq V$, $u' + (-u) \in U$.
Assim, $s + (-s') \in S \cap U$ e $u' + (-u) \in S \cap U$.
Por hipótese, $S \cap U = \{\mathbf{0}_V\}$.
Então, $s + (-s') = \mathbf{0}_V$ e $u' + (-u) = \mathbf{0}_V$.
Assim, $s = s'$ e $u' = u$. Contradição.
Logo, vale a unicidade.

Teo32. (**Teorema da Dimensão**)

Se S e U são subespaços vetoriais de V então $\dim(S+U) = \dim S + \dim U - \dim(S \cap U)$.

dem.: Seja $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ uma base do subespaço interseção $S \cap U$.

Pelo Teo23, $\{v_1, v_2, ..., v_r, w_1, w_2, ..., w_s\}$ é uma base do subespaço *S*.

Analogamente, $\{v_1, v_2, ..., v_r, u_1, u_2, ..., u_t\}$ é uma base do subespaço *U*.

O subespaço soma $S+U$ é gerado pelo conjunto $\{v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_s, u_1, ..., u_t\}$, isto é, $S+U = [v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_s, u_1, ..., u_t]$.

Seja $k_1 \cdot v_1 + ... + k_r \cdot v_r + l_1 \cdot w_1 + ... + l_s \cdot w_s + m_1 \cdot u_1 + ... + m_t \cdot u_t = \mathbf{0}_V$ (1)

Mas, $-(m_1 \cdot u_1 + ... + m_t \cdot u_t) = k_1 \cdot v_1 + ... + k_r \cdot v_r + l_1 \cdot w_1 + ... + l_s \cdot w_s$

Assim, $m_1 \cdot u_1 + ... + m_t \cdot u_t \in S$

Mas, $m_1 \cdot u_1 + ... + m_t \cdot u_t \in U$

Assim, $m_1 \cdot u_1 + ... + m_t \cdot u_t = p_1 \cdot v_1 + ... + p_r \cdot v_r$, para certos $p_1, p_2, ..., p_r \in \mathbf{R}$.

Como $\{v_1, v_2, ..., v_r, u_1, u_2, ..., u_t\}$ é uma base.

Então, $m_1 = m_2 = ... = m_t = 0$.

Substituindo em (1): $k_1 \cdot v_1 + ... + k_r \cdot v_r + l_1 \cdot w_1 + ... + l_s \cdot w_s = \mathbf{0}_V$

Como $\{v_1, v_2, ..., v_r, w_1, w_2, ..., w_s\}$ é uma base.

Tem-se, $k_1 = ... = k_r = l_1 = ... = l_s = 0$.

Então, $\{v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_s, u_1, ..., u_t\}$ é LI.

Logo, $\{v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_s, u_1, ..., u_t\}$ é uma base para o subespaço soma $S+U$.

Assim, $\dim S + \dim U = (r+s) + (r+t) = r + (r+s+t) = \dim(S \cap U) + \dim(S+U)$.

Logo, $\dim(S+U) = \dim S + \dim U - \dim(S \cap U)$.

Corolário32. Seja *S* é um subespaço vetorial de *V*. Se $\dim S = \dim V$ então $S = V$.

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Transformação Linear

Sejam V e W espaços vetoriais reais. Dizemos que uma função $T: V \to W$ é uma **transformação linear** se a função ***T* preserva as operações** de adição e de multiplicação por escalar, isto é, se os seguintes axiomas são satisfeitos:

TL1. Para quaisquer $v, u \in V$, $T(v+u) = T(v) + T(u)$.
TL2. Para todo $v \in V$ e para todo $k \in \mathbf{R}$, $T(k \cdot v) = k \cdot T(v)$.

Exemplos:

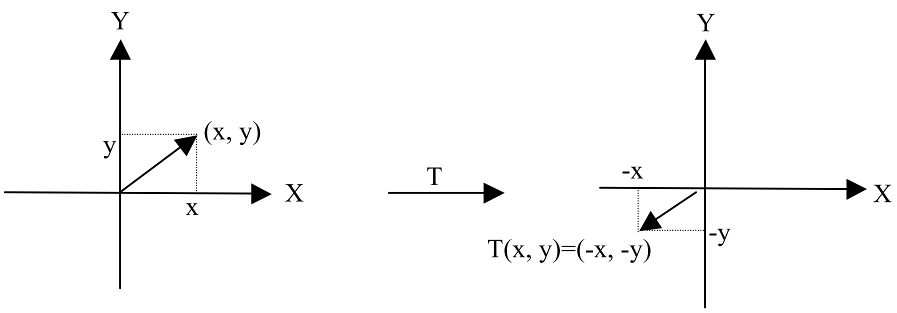
1) $T: \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$
$(x,y) \mapsto T(x,y) = (-x,-y)$

Verificando os axiomas:

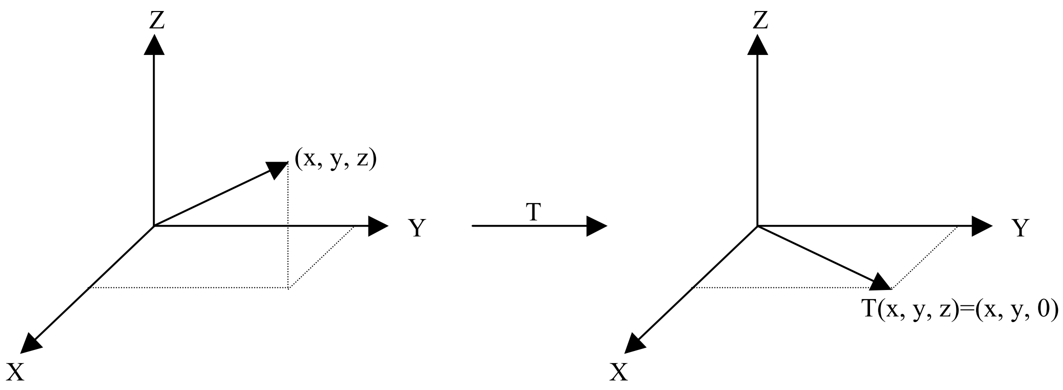
TL1. $T((x,y)+(z,t)) = T(x,y) + T(z,t)$, para quaisquer $(x,y),(z,t) \in \mathbf{R^2}$?
$T((x,y)+(z,t)) = T(x+z, y+t) = (-(x+z), -(y+t)) = (-x-z, -y-t)$
$T(x,y) + T(z,t) = (-x,-y) + (-z,-t) = (-x-z, -y-t)$
Assim, a transformação linear *T* preserva a operação de adição de vetores.

TL2. $T(k \cdot (x,y)) = k \cdot T(x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbf{R^2}$ e para todo $k \in \mathbf{R}$?
$T(k \cdot (x,y)) = T(kx, ky) = (-(kx), -(ky)) = (k(-x), k(-y)) = k \cdot (-x,-y) = k \cdot T(x,y)$
Assim, a transformação linear *T* preserva a operação de multiplicação por escalar.

Considere $v = (1,2)$ e $u = (-1,3)$.
$T(v) = T(1,2) = (-1,-2)$
$T(u) = T(-1,3) = (1,-3)$
$T(v) + T(u) = (-1,-2) + (1,-3) = (0,-5)$
$T(v+u) = T((1,2)+(-1,3)) = T(0,5) = (0,-5)$
$T(2 \cdot v) = T(2 \cdot (1,2)) = T(2,4) = (-2,-4) = 2 \cdot (-1,-2) = 2 \cdot T(1,2) = 2 \cdot T(v)$



2) $T: \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$
$(x,y,z) \mapsto T(x,y,z) = (x,y,0)$
T é uma transformação linear (Verifique !)
Esta transformação linear associa a cada vetor do $\mathbf{R^3}$ sua projeção ortogonal sobre o plano *XY*.



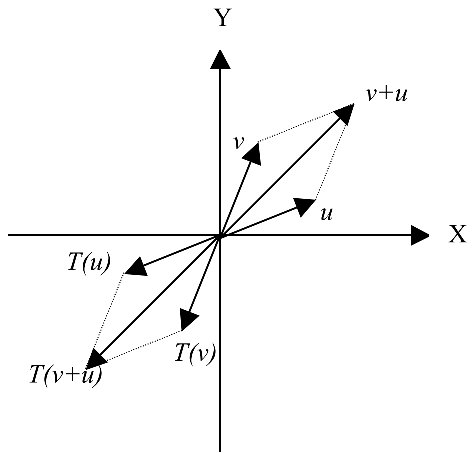
A transformação linear $T_{\mathbf{0}} : V \to W$ tal que $v \mapsto T_{\mathbf{0}}(v) = \mathbf{0}_W$ é denominada **Transformação Nula**.
Seja a transformação linear $T : V \to W$. Se os conjuntos V e W são iguais, $V = W$, então T é denominada um **Operador Linear**.
O operador linear $I_V : V \to V$ tal que $v \mapsto I_V(v) = v$ é denominado **Operador Identidade**.
As transformações lineares $T : V \to \mathbf{R}$ são denominadas **Funcionais Lineares**.

Operadores Lineares no Espaço Vetorial R^2

Reflexão em torno do eixo *X*: $T(x, y) = (x, -y)$.

Reflexão em torno do eixo *Y*: $T(x, y) = (-x, y)$.

Reflexão em torno da origem: $T(x, y) = (-x, -y)$.

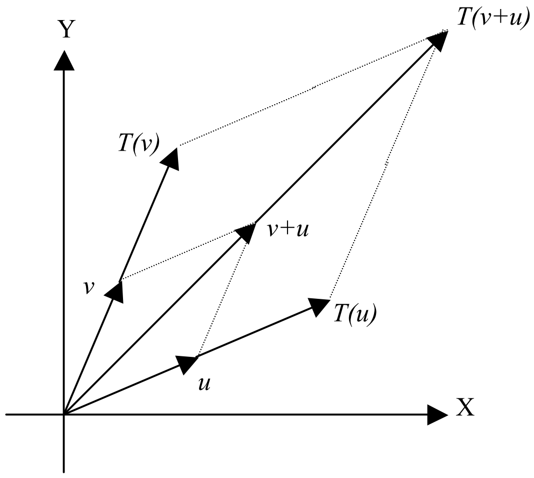


Reflexão em torno da reta $x = y$: $T(x, y) = (y, x)$.

Reflexão em torno da reta $x = -y$: $T(x, y) = (-y, -x)$.

Dilatação ou Contração de fator k na direção do vetor: $T(x, y) = (kx, ky)$ com $k \in \mathbf{R}$.

Se $|k| > 1$: dilatação.



Se $|k| < 1$: contração.

Se $k < 0$: troca de sentido.

Se $k = 1$: operador identidade.

Dilatação ou Contração de fator k na direção do eixo X: $T(x, y) = (kx, y)$ com $k \in \mathbf{R}, k > 0$.

Se $k > 1$: dilatação.

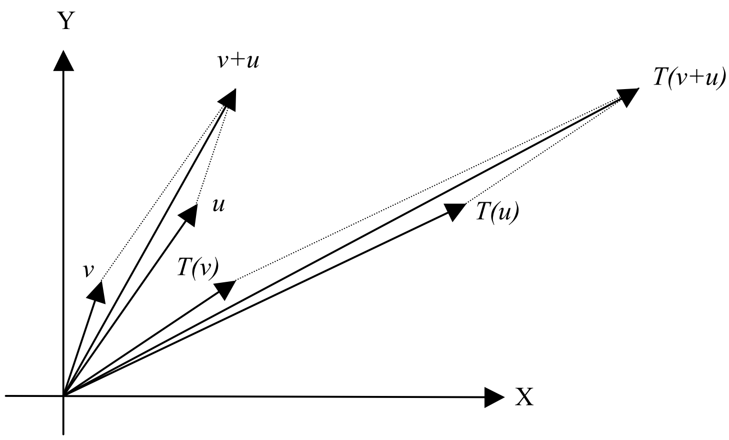
Se $0 < k < 1$: contração.

Dilatação ou Contração de fator k na direção do eixo Y: $T(x, y) = (x, ky)$ com $k \in \mathbf{R}, k > 0$.

Se $k > 1$: dilatação.

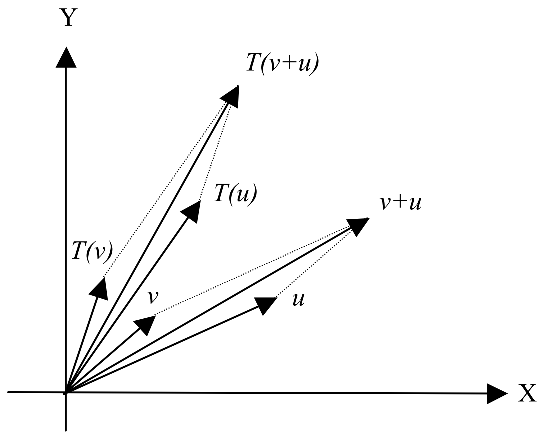
Se $0 < k < 1$: contração.

Cisalhamento na direção do eixo X: $T(x, y) = (x + ky, y)$ com $k \in \mathbf{R}$.



Cisalhamento na direção do eixo Y: $T(x, y) = (x, kx + y)$ com $k \in \mathbf{R}$.

Rotação: $T(x,y)=(x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta, x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta)$ com $0\le\theta\le 2\pi$.



Propriedades

1. Se $T:V\to W$ é uma transformação linear então $T(\mathbf{0}_V)=\mathbf{0}_W$.

   dem.: $T(\mathbf{0}_V)=T(\mathbf{0}_V+\mathbf{0}_V)=T(\mathbf{0}_V)+T(\mathbf{0}_V)$.

   Mas, $T(\mathbf{0}_V)=T(\mathbf{0}_V)+\mathbf{0}_W$, pois $T(\mathbf{0}_V)\in W$ e $\mathbf{0}_W$ é o elemento neutro em *W*.

   Assim, , $T(\mathbf{0}_V)+T(\mathbf{0}_V)=T(\mathbf{0}_V)+\mathbf{0}_W$.

   Logo, $T(\mathbf{0}_V)=\mathbf{0}_W$.

   Portanto, se $T(\mathbf{0}_V)\neq\mathbf{0}_W$ então *T* não é uma transformação linear.

   No entanto, o fato de $T(\mathbf{0}_V)=\mathbf{0}_W$ não é suficiente para que T seja linear.

   Por exemplo, $T:\mathbf{R^2}\to\mathbf{R^2}$ tal que $T(x,y)=(x^2,y^2)$.

   $$T(1,2)=(1^2,2^2)=(1,4)$$
   $$T(3,5)=(3^2,5^2)=(9,25)$$
   $$T(1,2)+T(3,5)=T(10,29)$$
   $$T((1,2)+(3,5))=T(4,7)=(4^2,7^2)=(16,49)$$

   Assim, $T(v+u)\neq T(v)+T(u)$

   Embora, $T(0,0)=(0,0)$, *T* não é uma transformação linear.

2. Seja $T:V\to W$ uma transformação linear.

   Então $T(k_1\cdot v_1+k_2\cdot v_2+...+k_n\cdot v_n)=k_1\cdot T(v_1)+k_2\cdot T(v_2)+...+k_n\cdot T(v_n)$ para quaisquer $v_1,v_2,...,v_n\in V$ e para quaisquer $k_1,k_2,...,k_n\in\mathbf{R}$.

   Corolário: Sabendo-se as imagens dos vetores de uma base do espaço vetorial *V* é possível determinar a transformação linear $T:V\to W$.

Obtendo a Lei de uma Transformação Linear

Seja $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ um operador linear tal que $T(2,3)=(-1,5)$ e $T(0,1)=(2,1)$. Como encontrar a lei que define este operador?

Solução:

$\{(2,3),(0,1)\}$ é base para $\mathbf{R}^2$.(Verifique!)

Portanto, qualquer vetor $v\in \mathbf{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear destes vetores.

$v=(x,y)=k_1\cdot(2,3)+k_2\cdot(0,1)$ com $k_1,k_2\in\mathbf{R}$.

$$=(2k_1,3k_1)+(0,k_2)$$
$$=(2k_1,3k_1+k_2)$$

Assim, $x=2k_1$ e $y=3k_1+k_2$.

Então, $k_1=\frac{x}{2}$ e $k_2=\frac{2y-3x}{2}$.

Logo, $(x,y)=\frac{x}{2}(2,3)+\frac{2y-3x}{2}(0,1)$.

Aplicando o operador linear,

$$\begin{aligned}T(x,y)&=T\left(\frac{x}{2}(2,3)+\frac{2y-3x}{2}(0,1)\right)\\&=\frac{x}{2}\cdot T(2,3)+\frac{2y-3x}{2}\cdot T(0,1)\\&=\frac{x}{2}\cdot(-1,5)+\frac{2y-3x}{2}\cdot(2,1)\\&=\left(-\frac{x}{2},\frac{5x}{2}\right)+\left(2y-3x,\frac{2y-3x}{2}\right)\\&=\left(\frac{-7x+4y}{2},x+y\right)\end{aligned}$$

Logo, $T(x,y)=\left(\frac{-7x+4y}{2},x+y\right)$.

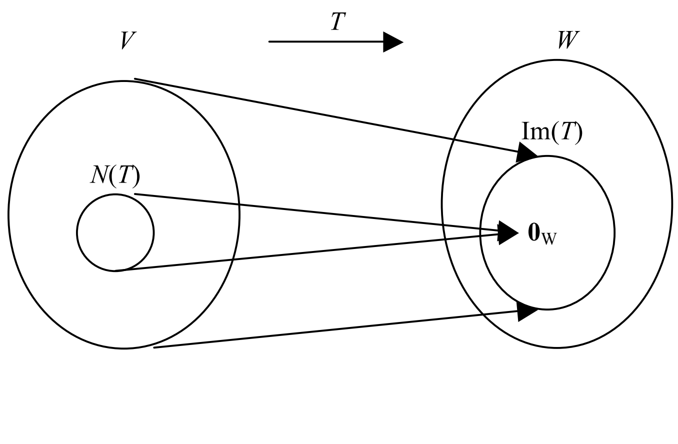
Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Núcleo de uma transformação linear $T:V\to W$ é o conjunto de vetores do espaço vetorial V cuja imagem é o vetor $\mathbf{0}_W$.

Notação: $N(T)=Ker(T)=\{v\in V\,|\,T(v)=\mathbf{0}_W\}$

Imagem de uma transformação linear $T:V\to W$ é o conjunto de vetores de W que são imagem dos vetores do conjunto V.

Notação: $\mathrm{Im}(T)=T(V)=\{w\in W\,|\,T(v)=w,\text{ para algum } v\in V\}$



Propriedades

1. $N(T)$ é um subespaço vetorial de *V*.
2. $\text{Im}(T)$ é um subespaço vetorial de *W*.
3. **Teorema do Núcleo e da Imagem** : $\dim V = \dim N(T) + \dim \text{Im}(T)$

Exemplo: Seja $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(x, y) = (0, x + y, 0)$.

$N(T) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid T(x, y) = (0,0,0)\}$.

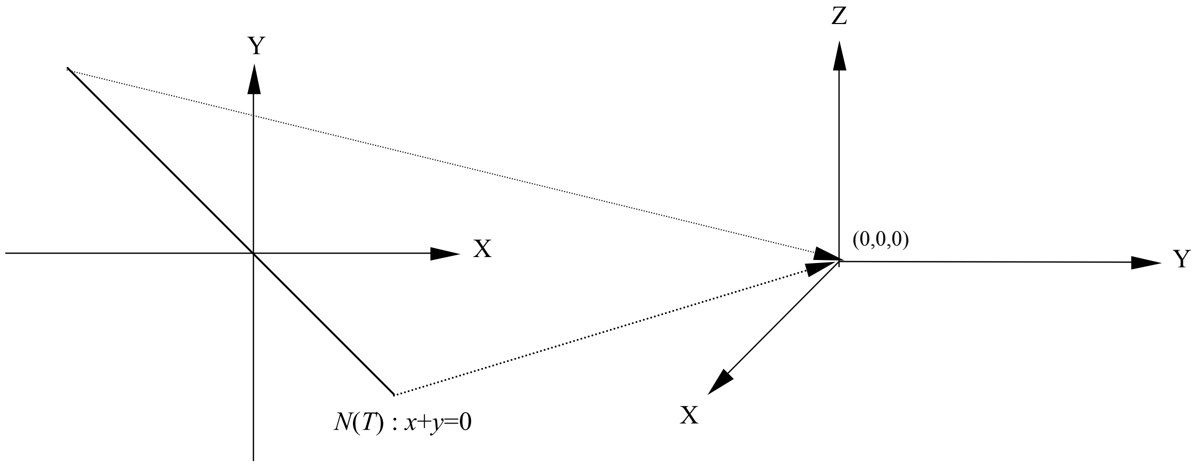
Então, $T(x, y) = (0, x + y, 0) = (0,0,0)$.

Assim, $x + y = 0 \therefore x = -y$.

Portanto, $N(T) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = -y\} = \{(-y, y), y \in \mathbf{R}\}$.

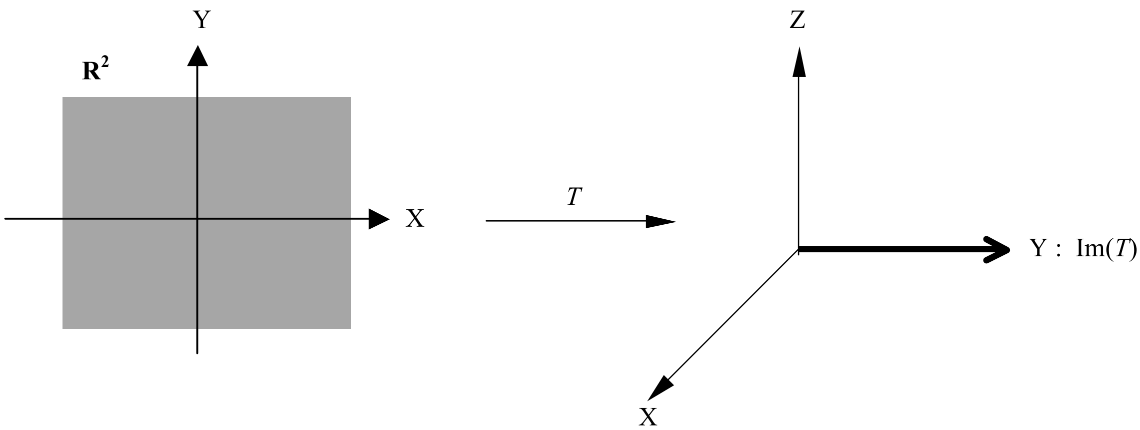
Uma base é $\{(-1,1)\}$ e $\dim N(T) = 1$.

Representação gráfica,



$\text{Im}(T) = \{T(x, y) = (0, x + y, 0), \text{ para todo } (x, y) \in \mathbf{R}^2\}$

Uma base para o conjunto imagem é $\{(0,1,0)\}$ e $\dim \text{Im}(T) = 1$.



Observe que, $\dim \mathbf{R}^2 = \dim N(T) + \dim \text{Im}(T)$, $(2 = 1 + 1)$.

Transformação Linear Injetora

Uma transformação linear $T: V \to W$ é injetora, se para quaisquer $v, u \in V$, se $v \neq u$ então $T(v) \neq T(u)$. O que é equivalente a, se $T(v) = T(u)$ então $v = u$.

Exemplo:

1) A transformação linear $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(x, y) = (x, y, x + y)$ é injetora.
   Sejam $(x, y), (z, t) \in \mathbf{R}^2$.
   Se $T(x, y) = T(z, t) \therefore (x, y, x + y) = (z, t, z + t)$.
   Então $\begin{cases} x = z \\ y = t \\ x + y = z + t \end{cases}$
   Logo, $(x, y) = (z, t)$.

2) Seja o operador linear no $\mathbf{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x, 0, 0)$, que associa a cada vetor sua projeção ortogonal no eixo *X*.
   Considere os vetores $(2,1,3)$ e $(2,0,-4)$.
   Assim, $T(2,1,3) = T(2,0,-4) = (2,0,0)$.
   Então, T não é injetora, pois $T(v) = T(u)$ com $v \neq u$.

Teorema: Uma transformação $T: V \to W$ é injetora se e somente se $N(T) = \{\mathbf{0}_V\}$.
Assim, basta verificar se $N(T) = \{\mathbf{0}_V\}$ para garantir que uma transformação linear *T* é injetora.

Exemplo: Seja o operador linear em no $\mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2x, x + y)$ é injetora, pois:
$N(T) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid T(x, y) = (0,0)\} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (2x, x + y) = (0,0)\}$.
Assim, $\begin{cases} 2x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$
Então, $N(T) = \{(0,0)\}$.

Transformação Linear Sobrejetora

Uma transformação linear $T: V \to W$ é sobrejetora se o conjunto imagem de *T* é o conjunto *W*, isto é, $\mathrm{Im}(T) = W$.

Exemplo: O operador linear em $\mathbf{R}^2$ do exemplo anterior é injetor.
Então, $\dim N(T) = 0$.
Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, $\dim \mathbf{R}^2 = \dim N(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$.
Assim, $2 = 0 + \dim \mathrm{Im}(T) \therefore \dim \mathrm{Im}(T) = 2$.
Logo, $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^2$.

Transformação Linear Bijetora – Isomorfismo

Uma transformação linear $T: V \to W$ é bijetora quando for injetora e sobrejetora. Transformações lineares bijetoras são também denominadas **isomorfismos** e, conseqüentemente, V e W são denominados espaços vetoriais isomorfos.

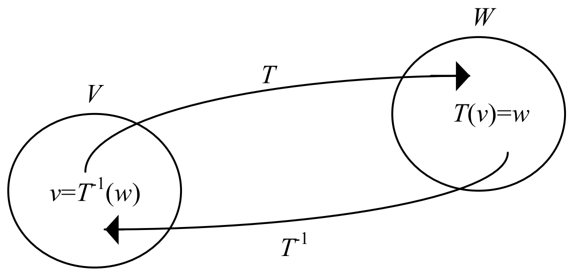
Exemplos:

1) $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y) = (y, -x)$.
2) $I_V : V \to V$ tal que $I_V(v) = v$.
3) $T: Mat_{2\times2}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^4$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = (t, z, y, x)$.

Uma transformação $T: V \to W$ é denominada de transformação invertível quando existir uma transformação $T^{-1}: W \to V$ tal que $T \circ T^{-1} = I_W$ e $T^{-1} \circ T = I_V$. A transformação T^{-1} é denominada a **transformação inversa de *T***. As transformações lineares bijetoras são transformações lineares **invertíveis**.

Teorema: Seja $T: V \to W$ uma transformação. A transformação T é bijetora se e somente se T é invertível.

Teorema: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear invertível. Então a transformação $T^{-1}: W \to V$ é linear.



Obtendo a Lei da Transformação Linear Inversa T^{-1}

Seja o operador linear $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2x, -y)$. O operador linear inverso T^{-1} será obtido da maneira a seguir:

$\{(1,0), (0,1)\}$ é uma base para $\mathbf{R}^2$.

$T(1,0) = (2,0)$ e $T(0,1) = (0,-1)$.

Portanto, $T^{-1}(2,0) = (1,0)$ e $T^{-1}(0,-1) = (0,1)$.

Obtendo a lei de T^{-1}: $(x, y) = k_1 \cdot (2,0) + k_2 \cdot (0,-1) = (2k_1, 0) + (0, -k_2) = (2k_1, -k_2)$.

Assim, $\begin{cases} x = 2k_1 \\ y = -k_2 \end{cases}$

Tem-se que, $k_1 = \dfrac{x}{2}$ e $k_2 = -y$.

Então, $(x, y) = \frac{x}{2} \cdot (2,0) + (-y) \cdot (0,-1)$.

$$\begin{aligned} T^{-1}(x, y) &= T^{-1}\left(\tfrac{x}{2} \cdot (2,0) + (-y) \cdot (0,-1)\right) \\ &= \tfrac{x}{2} \cdot T^{-1}(2,0) + (-y) \cdot T^{-1}(0,-1) \\ &= \tfrac{x}{2} \cdot (1,0) + (-y) \cdot (0,-1) \\ &= \left(\tfrac{x}{2}, -y\right) \end{aligned}$$

Logo, a lei é $T^{-1}(x, y) = \left(\frac{x}{2}, -y\right)$.

Matriz Associada a uma Transformação Linear

Sejam V um espaço vetorial n-dimensional, W um espaço vetorial m-dimensional e $T: V \to W$ uma transformação linear.

Considerando as bases $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de V e $B = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ de W e um vetor qualquer $v \in V$, tem-se:

$$v = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n$$

com $k_i \in \mathbf{R}$, para todo $i = 1,...,n$.

Aplicando a transformação linear T,

$$T(v) = T(k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n)$$

$$T(v) = k_1 \cdot T(v_1) + k_2 \cdot T(v_2) + ... + k_n \cdot T(v_n) \qquad (1)$$

Além disso, $T(v) \in W$, portanto:

$$T(v) = l_1 \cdot w_1 + l_2 \cdot w_2 + ... + l_m \cdot w_m \qquad (2)$$

com $l_j \in \mathbf{R}$, para todo $j = 1,...,m$.

Como $T(v_i) \in W$, para todo $i = 1,...,n$.

$$\left.\begin{array}{l} T(v_1) = a_{11} \cdot w_1 + a_{21} \cdot w_2 + ... + a_{m1} \cdot w_m \\ T(v_2) = a_{12} \cdot w_1 + a_{22} \cdot w_2 + ... + a_{m2} \cdot w_m \\ \quad ... \\ T(v_n) = a_{1n} \cdot w_1 + a_{2n} \cdot w_2 + ... + a_{mn} \cdot w_m \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Substituindo (3) em (1), tem-se:

$$T(v) = k_1 \cdot (a_{11} \cdot w_1 + ... + a_{m1} \cdot w_m) + k_2 \cdot (a_{12} \cdot w_1 + .. + a_{m2} \cdot w_m) + ... + k_n \cdot (a_{1n} \cdot w_1 + ... + a_{mn} \cdot w_m)$$

$$T(v) = (k_1 a_{11} + k_2 a_{12} + ... + k_n a_{1n}) \cdot w_1 + ... + (k_1 a_{m1} + k_2 a_{m2} + ... + k_n a_{mn}) \cdot w_m \qquad (4)$$

Comparando (2) e (4), tem-se:

$$l_1 = k_1 a_{11} + k_2 a_{12} + ... + k_n a_{1n}$$

$$l_2 = k_1 a_{21} + k_2 a_{22} + ... + k_n a_{2n}$$

$$..$$

$$l_m = k_1 a_{m1} + k_2 a_{m2} + ... + k_n a_{mn}$$

Na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ ... \\ l_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ ... \\ k_n \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$[T(v)]_B = [T]_B^A . [v]_A$$

A matriz $[T]_B^A$ é a **matriz associada a transformação *T* em relação as bases *A* e *B*.**

Exemplo: Seja a transformação linear $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(x, y) = (x, y, x + y)$. Sendo A a base canônica do $\mathbf{R}^2$ e B a base canônica do $\mathbf{R}^3$, tem-se:

$T(1,0) = (1,0,1) = 1 \cdot (1,0,0) + 0 \cdot (0,1,0) + 1 \cdot (0,0,1)$ e

$T(0,1) = (0,1,1) = 0 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) + 1 \cdot (0,0,1)$.

Então, $[T]_B^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Por exemplo, $[(2,3)]_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Obtém-se, $[T(2,3)]_B = [(2,3,5)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Sejam as bases não canônicas $A = \{(1,2),(3,5)\}$ e $B = \{(1,2,0),(2,-3,1),(0,-1,1)\}$.

Assim, $T(1,2) = (1,2,3) = 2 \cdot (1,2,0) + (-\frac{1}{2}) \cdot (2,-3,1) + \frac{7}{2} \cdot (0,-1,1)$ e

$$T(3,5) = (3,5,8) = \frac{16}{3} \cdot (1,2,0) + (-\frac{7}{6}) \cdot (2,-3,1) + \frac{55}{6} \cdot (0,-1,1).$$

Então, $[T]_B^A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{16}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{6} \\ \frac{7}{2} & \frac{55}{6} \end{pmatrix}$.

Por exemplo, $[(2,3)]_A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Obtém-se, $[T(2,3)]_B = [(2,3,5)]_B = \begin{pmatrix} 2 & \frac{16}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{6} \\ \frac{7}{2} & \frac{55}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{17}{3} \end{pmatrix}$

As matrizes associadas a alguns dos operadores lineares no espaço vetorial $\mathbf{R}^2$ em relação à base canônica.

	$[T]_B^A.[v]_A$	$=$	$[T(v)]_B$
Reflexão em torno do eixo X	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$
Dilatação ou Contração de fator k na direção do vetor	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$
Cisalhamento na direção do eixo Y	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} x \\ kx + y \end{pmatrix}$
Rotação	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} x\cos\theta - ysen\theta \\ xsen\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$

Operações com Transformações Lineares

1. **Adição**

Sejam $T_1 : V \to W$ e $T_2 : V \to W$ transformações lineares. Define-se a adição de T_1 com T_2 como sendo a transformação linear:

$$(T_1 + T_2) : V \to W$$
$$v \mapsto (T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v)$$

Matricialmente, $[T_1 + T_2]_B^A = [T_1]_B^A + [T_2]_B^A$, onde *A* é uma base de *V* e *B* uma base de *W*.

Exemplo: Sejam $T_1 : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ tal que $T_1(x, y, z) = (x, 2y, z)$ e $T_2 : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ tal que $T_2(x, y, z) = (0, 0, z)$.

A transformação soma é $(T_1 + T_2) : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ tal que $(T_1 + T_2)(x, y, z) = (x, 2y, 2z)$.

Ainda, $[T_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $[T_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $[T_1 + T_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ em relação a base canônica do $\mathbf{R^3}$.

2. **Multiplicação por Escalar**

Sejam $T : V \to W$ uma transformação linear e $k \in \mathbf{R}$ um escalar. Define-se a transformação linear produto de *T* pelo escalar *k* como sendo:

$$(k \cdot T) : V \to W$$
$$v \mapsto (k \cdot T)(v) = k \cdot T(v)$$

Matricialmente, $[k \cdot T]_B^A = k \cdot [T]_B^A$, onde *A* é uma base de *V* e *B* é uma base de *W*.

Exemplo: Seja $[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $\text{k} = 2$.

Então, $T(x, y) = (x + 2y, y, 3x)$ e $(2 \cdot T)(x, y) = (2x + 4y, 2y, 6x)$.

Ainda, $[2 \cdot T] = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot [T]$

3. **Composição**

Sejam $T_1 : V \to U$ e $T_2 : U \to W$ transformações lineares. Define-se a composta de T_1 com T_2 como sendo a transformação linear:

$$(T_2 \circ T_1) : V \to W$$
$$v \mapsto (T_2 \circ T_1)(v) = T_2(T_1(v))$$

Matricialmente, $[T_2 \circ T_1]_C^A = [T_2]_C^B \cdot [T_1]_B^A$, onde *A* é uma base de V, *B* é uma base de U e C é uma base de *W*.

Exemplo: Sejam os operadores lineares no $\mathbf{R}^2$, $T_1(x,y)=(2x+y,-y)$ e $T_2(x,y)=(2y,-x+3y)$.

$(T_1\circ T_2)(x,y)=T_1(T_2(x,y))=T_1(2y,-x+3y)=(2(2y)+(-x+3y),-(-x+3y))=(-x+7y,x-3y)$

$(T_2\circ T_1)(x,y)=T_2(T_1(x,y))=T_2(2x+y,-y)=(2(-y),-(2x+y)+3(-y))=(-2y,-2x-4y)$

Com relação a base canônica: $[T_1]=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ e $[T_2]=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

Assim, $[T_1\circ T_2]=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ e $[T_2\circ T_1]=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & -4\end{pmatrix}$.

Propriedades de Transformações Invertíveis

Sejam $T:V\to W$, $T_1:V\to W$ e $T_2:W\to U$ transformações lineares invertíveis e $k\in\mathbf{R}, k\neq 0$.

1. $(T^{-1})^{-1}=T$
2. $(k\cdot T)^{-1}=k^{-1}\cdot T^{-1}$
3. $(T_2\circ T_1)^{-1}=T_1^{-1}\circ T_2^{-1}$

Exercícios

1) Verificar se as transformações são lineares:

a) $T:\ \mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$
$(x,y,z)\mapsto T(x,y,z)=(x^2,y+z)$

b) $T:\ \mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$
$(x,y,z)\mapsto T(x,y,z)=(x,2y)$

c) $T:\ \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$
$(x,y)\mapsto T(x,y)=(x+a,y+b),\ a,b\in\mathbf{R}-\{0\}$

d) $T:\ \mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$
$(x,y,z)\mapsto T(x,y,z)=x-3y+1$

e) $T:\ \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$
$(x,y)\mapsto T(x,y)=|x|$

2) Para que valores de $k\in\mathbf{R}$ a transformação no $\mathbf{R}^3$ tal que $T(x,y,z)=(2x+3k,y,3z)$ é linear?

3) Seja $Mat_{n\times n}(\mathbf{R})$ o espaço vetorial das matrizes quadradas $n\times n$ sobre $\mathbf{R}$ e $M\in Mat_{n\times n}(\mathbf{R})$ uma matriz arbitrária qualquer.
A transformação $T:Mat_{n\times n}(\mathbf{R})\to Mat_{n\times n}(\mathbf{R})$ tal que $T(A)=A\cdot M+M\cdot A$ é linear?

4) Sejam $v=(0,1), u=(1,0), t=(2,1)$ e $w=(1,2)$ e $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ tal que $T(x,y)=(2x,2y)$, que define a dilatação de fator 2 na direção do vetor.
Represente $v,u,t,w,T(v),T(u),T(t)$ e $T(w)$ em um sistema de eixos cartesianos.

5) Considere a transformação linear $T:\mathbf{R}^2 \to Mat_{2\times 1}(\mathbf{R})$ tal que $T(x,y)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Determine $T(1,1), T(-3,4)$ e $T(x,y)$.

6) Encontre a lei que define a transformação linear $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ que faz associar cada vetor $v=(x,y)$ à sua reflexão em torno do eixo *Y*.
Determine $T(-2,-3)$.
Represente no sistema de eixos cartesianos.

7) Seja $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ uma transformação linear tal que $T(1,0,0)=(2,4)$, $T(0,1,0)=(3,5)$ e $T(1,1,1)=(1,1)$. Indique a lei de *T*.

8) Seja $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ uma transformação linear definida por $T(1,1,1)=(1,2)$, $T(1,1,0)=(2,3)$ e $T(1,0,0)=(3,4)$.

a) Determine $T(x,y,z)$.
b) Determine $(x,y,z)\in \mathbf{R}^3$ tal que $T(x,y,z)=(-3,-2)$.
c) Determine $(x,y,z)\in \mathbf{R}^3$ tal que $T(x,y,z)=(0,0)$.

9) Calcule o núcleo e o conjunto imagem das transformações abaixo:

a) $$\begin{aligned} T:\ & \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2 \\ & (x,y,z)\mapsto T(x,y,z)=(x+2y+3z, 3x+2y+z) \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} T:\ & \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 \\ & (x,y)\mapsto T(x,y)=(x+y, 2x-y, -x+3y) \end{aligned}$$

10) Ache uma transformação linear $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ cujo núcleo seja gerado pelo vetor $(1,1,0)$.

11) Determinar um operador linear no $\mathbf{R}^3$ cujo conjunto imagem seja gerado por $\{(2,1,1),(1,-1,2)\}$.

12) Indique a lei de T^{-1} para cada uma das transformações lineares:

a) $$\begin{aligned} T:\ & \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \\ & (x,y)\mapsto T(x,y)=(y,-x) \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} I_V:\ & V \to V \\ & v \mapsto I_V(v)=v \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} T:\ & Mat_{2\times 2}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^4 \\ & \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mapsto T(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}) = (t,z,y,x) \end{aligned}$$

13) Seja o operador linear *T* no $\mathbf{R}^3$ tal que $T(x,y,z)=(x+2y, y, x+z)$. Mostre que *T* é um isomorfismo e indique sua inversa.

14) Considere $B = \{v, u, w\}$ uma base do $\mathbf{R}^3$, onde $v = (1,2,3)$, $u = (2,5,3)$ e $w = (1,0,1)$.

a) Ache uma fórmula para a transformação linear $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(v) = (1,0)$, $T(u) = (1,0)$ e $T(w) = (0,1)$.

b) Encontre uma base e a dimensão do $N(T)$.

c) Encontre uma base e a dimensão da $\mathrm{Im}(T)$.

d) T é invertível? Justifique sua resposta.

15) Seja $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (x + y, x + z)$. Indique:

a) $[T]_B^A$ considerando A e B bases canônicas.

b) $[T]_D^C$ onde $C = \{(1,0,0), (0,-1,0), (0,0,2)\}$ e $D = \{(1,2), (3,5)\}$.

c) $[T(v)]_D$ onde $v = (1,1,0)$.

16) Sejam S e T operadores lineares no $\mathbf{R}^2$ definidas por $S(x, y) = (x + 2y, y)$ e $T(x, y) = (x, 3y)$.
Determine:

a) $S + T$

b) $(2 \cdot S) + (4 \cdot T)$

c) $S \circ T$

d) $S \circ S$

17) Escolha alguns vetores de $\mathbf{R}^2$, represente-os no plano cartesiano. Em seguida encontre a imagem de cada um deles em relação ao operador S anterior. Represente essas imagens no plano cartesiano. Observe o que acontece.

18) Repita os mesmos passos do exercício anterior, para o operador T.

19) Seja T a transformação linear determinada pela matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Indique a lei da transformação.

b) Calcule $T(-2,1)$.

20) Seja T o operador linear no $\mathbf{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$.

a) Encontre a matriz de T na base $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (1,0,0)\}$.

b) Encontre $[T(1,0,-1)]_B$ utilizando $[T]_B^B$.

21)Seja T a transformação linear associada a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Ache uma base para $N(T)$.

b) Ache uma base para $\mathrm{Im}(T)$.

c) T é sobrejetora ? E injetora?

d) Determine a matriz associada a T em relação a base $\{(1,2,0), (0,-1,1), (0,1,2)\}$.

22) Seja $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ a transformação linear definida por $T(x, y) = (x + 2y, -x, 0)$.

a) Ache a matriz associada a T relativa as bases $A = \{(1,3), (-2,4)\}$ e $B = \{(1,1,1), (2,2,0), (3,0,0)\}$.

b) Use a matriz para calcular $[T(v)]_B$ onde $[v]_A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

23) Seja T a transformação linear associada a matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Qual a lei que define T?
b) Determine o núcleo de T e uma base para $N(T)$.
c) Determine a imagem de T e uma base para $\operatorname{Im}(T)$.

24) Seja a transformação linear $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x - y + 3z, 4x + 2y + 3z)$.

a) Considerando A e B as bases canônicas do $\mathbf{R}^3$ e do $\mathbf{R}^2$, encontre $[T]_B^A$.
b) Considerando $A = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$ uma base do $\mathbf{R}^3$ e $B = \{(1,1), (1,-1)\}$ uma base do $\mathbf{R}^2$, encontre $[T]_B^A$.

25) Seja a transformação linear $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(x, y) = (2x + y, y, x + y)$. Encontre:

a) A matriz de T em relação a base canônica
b) A matriz de T em relação as bases $A = \{(1,-2), (0,1)\}$ e $B = \{(1,0,0), (0,2,1), (0,0,3)\}$.

26) Considere $[T]_B^A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ onde $A = \{(1,0), (-1,1)\}$ e $B = \{(1,2,3), (0,-1,1), (0,0,2)\}$. Encontre as coordenadas de $[T(v)]_B$ sabendo que as coordenadas de v em relação à base canônica do $\mathbf{R}^2$ são $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

27) Sabendo que a transformação linear $T_\theta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, cuja matriz em relação à base canônica é $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, aplicada a um vetor $[v] = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ indica a rotação do vetor v de um ângulo θ.

Assim, $[T_\theta] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot [v]$.

Utilizando a matriz de rotação, determine o vértice $C = (x, y)$ de um triângulo retângulo e isósceles em A, onde $A = (2,1)$ e $B = (5,3)$.

28) Seja $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a matriz associada a um operador T em relação à base $\{(1,0,1), (0,-1,1), (0,0,1)\}$.

Determine a lei de T.

Respostas

1) b) Sim

2) $k=0$

3) Sim

5) $T(1,1)=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ e $T(-3,4)=\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$

$T(x,y)=\begin{pmatrix}x+2y\\3y\end{pmatrix}$

6) $T(x,y)=(-x,y)$ e $T(-2,-3)=(2,-3)$

7) $T(x,y,z)=(2x+3y-4z,4x+5y-8z)$

8) a) $T(x,y,z)=(3x-y-z,4x-y-z)$

b) $\{(1,6-z,z),z\in\mathbf{R}\}$

$\{(0,y,-y),y\in\mathbf{R}\}$

9) a) $N(T)=\{(z,-2z,z),z\in\mathbf{R}\}$

$\operatorname{Im}(T)=\mathbf{R}^2$

b) $N(T)=\{(0,0)\}$

$\operatorname{Im}(T)=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\mid -5x+4y+3z=0\}$

12) a) $T^{-1}(x,y)=(-y,x)$

b) $I_V^{-1}=I_V$

c) $T^{-1}(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}t&z\\y&x\end{pmatrix}$

14) a) $T(x,y,z)=(\frac{17x+y-z}{2},\frac{9x-3y-z}{8})$

b) $N(T)=\{(\frac{y}{3},y,0),y\in\mathbf{R}\}$

base $N(T):\{(1,3,0)\}$

$\dim N(T)=1$

c) $\operatorname{Im}(T)=\mathbf{R}^2$

base $\operatorname{Im}(T):\{(1,0),(0,1)\}$

$\dim\operatorname{Im}(T)=2$

d) Não, pois T não é injetora.

15) a) $[T]_B^A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

b) $[T]_D^C=\begin{pmatrix}-2&5&6\\1&-2&-2\end{pmatrix}$

c) $[T(v)]_D=\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}$

16) a) $(S+T)(x,y)=(2x+2y,4y)$

b) $(2\cdot S+4\cdot T)(x,y)=(6x+4y,14y)$

c) $(S\circ T)(x,y)=(x+6y,3y)$

d) $(S\circ S)(x,y)=(x+4y,y)$

19) a) $T(x,y)=(2x,4x,-4y)$

b) $T(-2,1)=(-4,-8,-4)$

20) a) $[T]_B=\begin{pmatrix}-3&1&1\\3&3&3\\2&-3&-4\end{pmatrix}$

b) $[T(1,0,-1)]_B=\begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix}$

21) a) base $N(T):\{(0,1,0)\}$

b) base $\operatorname{Im}(T):\{(1,3,2),(2,-1,0)\}$

c) Nem injetora nem sobrejetora.

d) $[T]_A=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&\frac{10}{3}&\frac{20}{3}\\1&-\frac{5}{3}&-\frac{10}{3}\end{pmatrix}$

22) a) $[T]_B^A=\begin{pmatrix}0&0\\-\frac{1}{2}&1\\\frac{8}{3}&\frac{4}{3}\end{pmatrix}$ b) $[T(v)]_B=\begin{pmatrix}0\\\frac{5}{2}\\0\end{pmatrix}$

23) a) $T(x,y)=(-x+2y,3x,2x+y)$

b) $N(T)=\{(0,0)\}$

$\operatorname{Im}(T)=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\mid 3x+5y-6z=0\}$

base $\operatorname{Im}(T):\{(-1,3,2),(2,0,1)\}$

24) a) $[T]_B^A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\4&2&3\end{pmatrix}$

b) $[T]_B^A=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}&\frac{7}{2}&6\\-\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}&-1\end{pmatrix}$

25) a) $[T]_B^A=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$ b) $[T]_B^A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$

26) $[T(v)]_B=\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$

27) $C=(0,4)$ ou $C=(4,-2)$

28) $T(x,y,z)=(-2x,y,-4x+y+2z)$

Apêndice C – Teoremas

Teo33. Se $T:V \to W$ é uma transformação linear então $T(\mathbf{0}_V)=\mathbf{0}_W$.

Teo34. Seja $T:V \to W$ uma transformação linear.

Então $T(k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n) = k_1 \cdot T(v_1) + k_2 \cdot T(v_2) + ... + k_n \cdot T(v_n)$, para quaisquer $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ e para quaisquer $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbf{R}$.

dem.: (indução em *n*).

Base: Para $k=2$.

$T(k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2) = T(k_1 \cdot v_1) + T(k_2 \cdot v_2) = k_1 \cdot T(v_1) + k_2 \cdot T(v_2)$ por TL1 e TL2.

Passo: (Hipótese de Indução) Supor que vale a igualdade para $k \in \mathbf{N}, k > 2$, isto é, $T(k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n) = k_1 \cdot T(v_1) + k_2 \cdot T(v_2) + ... + k_n \cdot T(v_n)$.

Vale a igualdade para $k+1$ vetores ?

$T((k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n) + k_{n+1} \cdot v_{n+1}) =$ por TL1.

$T(k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n) + T(k_{n+1} \cdot v_{n+1}) =$ por TL2.

$T(k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n) + k_{n+1} \cdot T(v_{n+1}) =$ por hipótese de indução.

$k_1 \cdot T(v_1) + k_2 \cdot T(v_2) + ... + k_n \cdot T(v_n) + k_{n+1} \cdot T(v_{n+1})$.

Assim, $T(k_1 \cdot v_1 + ... + k_n \cdot v_n + k_{n+1} \cdot v_{n+1}) = k_1 \cdot T(v_1) + ... + k_n \cdot T(v_n) + k_{n+1} \cdot T(v_{n+1})$

Logo, vale a igualdade para todo $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$.

Corolário34: Sabendo-se as imagens dos vetores de uma base do espaço vetorial *V* é possível determinar a transformação linear $T:V \to W$.

Teo35. Seja $T:V \to W$ é uma transformação linear.

Então i) $T(-v) = -T(v)$, para todo $v \in V$.

ii) $T(v-u) = T(v) - T(u)$, para quaisquer $v, u \in V$.

Teo36. Seja $T:V \to W$ uma transformação linear e *S* um subespaço vetorial do espaço vetorial *V* então $T(S) = \{w \in W \mid \text{existe } s \in S \text{ tal que } T(s) = w\}$ é um subespaço vetorial do espaço *W*.

dem.: (Sub1) Por hipótese, $S \leq V$.

Por Sub1, $\mathbf{0}_V \in S$.

Pelo Teo33, $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

Logo, $\mathbf{0}_W \in T(S)$.

(Sub2) Sejam $w_1, w_2 \in T(S)$.

Então, existem $v_1, v_2 \in S$ tais que $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$.

Assim, $w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2)$, por TL1.

Como, $S \leq V$.

Pelo fechamento para operação de adição em *S*, $v_1 + v_2 \in S$.

Então, $w_1 + w_2 \in T(S)$.

Logo, vale o fechamento para operação de adição em $T(S)$.

(Sub3) Sejam $w \in T(S)$ e $k \in \mathbf{R}$.

Então, existe $v \in S$ tal que $T(v) = w$.

Assim, $k \cdot w = k \cdot T(v) = T(k \cdot v)$, por TL2.

Como, $S \leq V$.
Pelo fechamento para operação de multiplicação por escalar em *S*, $k \cdot v \in S$.
Então, $k \cdot w \in T(S)$.
Logo, vale o fechamento para operação de multiplicação por escalar em $T(S)$.

Teo37. $N(T)$ é um subespaço vetorial de *V*.

Teo38. $\mathrm{Im}(T)$ é um subespaço vetorial de *W*.

Teo39. (**Teorema do Núcleo e da Imagem**)
Seja $T: V \to W$ uma transformação linear . Então $\dim V = \dim N(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$.
dem.: Considere $\dim N(T) = t$ e $\{v_1, v_2, ..., v_t\} \subseteq N(T)$ uma base para $N(T)$.
Seja $\dim \mathrm{Im}(T) = s$ e $\{w_1, w_2, ..., w_s\} \subseteq \mathrm{Im}(T)$ uma base para $\mathrm{Im}(T)$.
Existem $u_1, u_2, ..., u_s \in V$ tais que $T(u_1) = w_1, T(u_2) = w_2, ..., T(u_s) = w_s$. (1)
Considere o conjunto $\{v_1, ..., v_t, u_1, ..., u_s\} \subseteq V$.
Se $v \in V$ então $T(v) \in \mathrm{Im}(T)$.
Como $[w_1, ..., w_s] = \mathrm{Im}(T)$, existem $l_1, ..., l_s \in \mathbf{R}$ tais que $T(v) = l_1 \cdot w_1 + ... + l_s \cdot w_s$.(2)
Considere o vetor $u = l_1 \cdot u_1 + ... + l_s \cdot u_s - v$. (3)
Assim, $T(u) = T(l_1 \cdot u_1 + ... + l_s \cdot u_s - v)$.
Pelo Teo34, $T(u) = l_1 \cdot T(u_1) + ... + l_s \cdot T(u_s) - T(v)$.
De (1), $T(u) = l_1 \cdot w_1 + ... + l_s \cdot w_s - T(v)$.
De (2), $T(u) = T(v) - T(v)$.
Assim, $T(u) = \mathbf{0}_W$.
Então, $u \in N(T)$.
Mas, $[v_1, ..., v_t] = N(T)$.
Então, existem $k_1, ..., k_t \in \mathbf{R}$ tais que $u = k_1 \cdot v_1 + ... + k_t \cdot v_t$. (4)
De (3) e (4), $l_1 \cdot u_1 + ... + l_s \cdot u_s - v = k_1 \cdot v_1 + ... + k_t \cdot v_t$.
Assim, $v = l_1 \cdot u_1 + ... + l_s \cdot u_s - k_1 \cdot v_1 - ... - k_t \cdot v_t$.
Então, $[v_1, ..., v_t, u_1, ..., u_s] = V$. (5)
Seja $k_1 \cdot v_1 + ... + k_t \cdot v_t + k_{t+1} \cdot u_1 + ... + k_{t+s} \cdot u_s = \mathbf{0}_V$, com $k_1, ..., k_{t+s} \in \mathbf{R}$. (6)
Assim, $T(k_1 \cdot v_1 + ... + k_t \cdot v_t + k_{t+1} \cdot u_1 + ... + k_{t+s} \cdot u_s) = T(\mathbf{0}_V)$.
Pelo Teo33, $T(k_1 \cdot v_1 + ... + k_t \cdot v_t + k_{t+1} \cdot u_1 + ... + k_{t+s} \cdot u_s) = \mathbf{0}_W$.
Pelo Teo34, $k_1 \cdot T(v_1) + ... + k_t \cdot T(v_t) + k_{t+1} \cdot T(u_1) + ... + k_{t+s} \cdot T(u_s) = \mathbf{0}_W$
Mas, $\{v_1, ..., v_t\} \subseteq N(T)$.
Então, $T(v_1) = \mathbf{0}_W, ..., T(v_t) = \mathbf{0}_W$. (7)
De (1) e (7), $k_1 \cdot \mathbf{0}_W + ... + k_t \cdot \mathbf{0}_W + k_{t+1} \cdot w_1 + ... + k_{t+s} \cdot w_s = \mathbf{0}_W$.
Assim, $k_{t+1} \cdot w_1 + ... + k_{t+s} \cdot w_s = \mathbf{0}_W$.
Como, $\{w_1, ..., w_s\}$ é uma base para $\mathrm{Im}(T)$.
Então, $\{w_1, ..., w_s\}$ é linearmente independente.
Tem-se, $k_{t+1} = ... = k_{t+s} = 0$.

Substituindo em (6), $k_1 \cdot v_1 + ... + k_t \cdot v_t = \mathbf{0}_V$.
Como, $\{v_1,...,v_t\}$ é uma base para $N(T)$.
Então, $\{v_1,...,v_t\}$ é linearmente independente.
Tem-se, $k_1 = ... = k_t = 0$.
Então, $\{v_1,...,v_t,u_1,...,u_s\}$ é linearmente independente. (8)
De (5) e (8), $\{v_1,...,v_t,u_1,...,u_s\}$ é uma base de V.
Logo, $\dim V = t + s = \dim N(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$.

Teo40. Seja $T : V \to W$ é uma transformação linear. T é uma transformação linear injetora se e somente se $N(T) = \{\mathbf{0}_V\}$.

dem.:

($\to$) Se T é uma transformação linear injetora então $N(T) = \{\mathbf{0}_V\}$?
Considere $v \in N(T)$ qualquer.
Então, $T(v) = \mathbf{0}_W$.
Pelo Teo33, $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.
Assim, $T(v) = T(\mathbf{0}_V)$.
Como T é uma transformação linear injetora.
Se $T(v) = T(\mathbf{0}_V)$ então $v = \mathbf{0}_V$.
Logo, $N(T) = \{\mathbf{0}_V\}$.

($\leftarrow$) Se $N(T) = \{\mathbf{0}_V\}$ então T é uma transformação linear injetora ?
Sejam $v, u \in V$ tais que $T(v) = T(u)$.
Assim, $T(v) - T(u) = \mathbf{0}_W$.
Pelo Teo35, $T(v - u) = \mathbf{0}_W$.
Mas, $N(T) = \{\mathbf{0}_V\}$.
Assim, $v - u = \mathbf{0}_V$.
Então, $v = u$.
Logo, T é uma transformação linear injetora.

Teo41.Seja $T : V \to W$ é uma transformação linear injetora e $\{v_1, v_2,..., v_n\} \subseteq V$ um conjunto de vetores linearmente independente. O conjunto $\{T(v_1), T(v_2),..., T(v_n)\} \subseteq W$ também é linearmente independente.

Teo42.Seja $T : V \to W$ é uma transformação linear injetora e $\dim V = \dim W$. Então a transformação linear T é sobrejetora.

Teo43.Seja $T : V \to W$ uma transformação. A transformação T é bijetora se e somente se for invertível.

Teo44. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear e $\{v_1, v_2,..., v_n\} \subseteq V$. Se $[v_1, v_2,..., v_n] = V$ então $[T(v_1), T(v_2),..., T(v_n)] = \mathrm{Im}(T)$.

Teo45. Sejam $T:V\to W$ e $R:W\to U$ transformações lineares.
Então a transformação composta $(R\circ T):V\to U$ tal que $(R\circ T)(v)=R(T(v))$ é linear.

Teo46. Sejam $T:V\to W$ e $R:W\to U$ transformações lineares bijetoras e $k\in\mathbf{R}, k\neq 0$.
Então i) a transformação inversa $T^{-1}:W\to V$ é linear.
ii) $(T^{-1})^{-1}=T$
iii) $(k\cdot T)^{-1}=k^{-1}\cdot T^{-1}$
iv) $(R\circ T)^{-1}=T^{-1}\circ R^{-1}$

Teo47. Seja $Q:V\to W$, $R:V\to W$, $S:W\to U$ e $T:W\to U$ transformações lineares e $k\in\mathbf{R}$.
Então i) $(S+T)\circ Q=(S\circ Q)+(T\circ Q)$
ii) $T\circ(Q+R)=(T\circ Q)+(T\circ R)$
iii) $(k\cdot T)\circ Q=k\cdot(T\circ Q)=T\circ(k\cdot Q)$

Teo48.Sejam *V* e *W* espaços vetoriais e $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ uma base *V*. Se o vetor v_i pode ser associado a um vetor $w_i\in W$, para todo $i=1,...,n$ então existe uma única transformação linear $T:V\to W$ tal que $T(v_i)=w_i$, para todo $i=1,...,n$.

Teo49. Seja $L(V,W)$ (ou $Hom(V,W)$) o conjunto de todas as transformações lineares de *V* em *W* e as seguintes operações:

$$+:L(V,W)\times L(V,W)\to L(V,W)$$
$$(T_1,T_2)\mapsto T_1+T_2 \text{ tal que } (T_1+T_2)(v)=T_1(v)+T_2(v)$$

$$\cdot:\mathbf{R}\times L(V,W)\to L(V,W)$$
$$(k,T)\mapsto k\cdot T \text{ tal que } (k\cdot T)(v)=k\cdot T(v)$$

Então $[L(V,W),\mathbf{R},+,\cdot]$ é um espaço vetorial.

Teo50. Se $\dim V=n$ e $\dim W=m$ então $\dim L(V,W)=nm$.

O conjunto $L(V,\mathbf{R})$ ou $Hom(V,\mathbf{R})$ ou V^* de todos os funcionais de *V* em **R** é denominado **espaço vetorial dual de *V***.

BIBLIOGRAFIA

- Anton, H. *Elementary Linear Algebra*. Wiley.
- Boldrini, J.L.; et al. *Álgebra Linear*. Harbra.
- Domingues; Hygino. *Álgebra Linear e Aplicações*. Atual Editora.
- Hoffman, K; Kunze, R. *Álgebra Linear*. Editora Polígono.
- Kolman, B. *Álgebra Linear*. LTC.
- Lay, C.D. Á*lgebra Linear e suas Aplicações*. LTC
- Lima, E.L. *Álgebra Linear*. IMPA.
- Lipschutz , S. *Álgebra Linear*. Mc.Graw-Hill.
- Steinbruch, A. *Álgebra Linear*. Mc.Graw-Hill.