Universidade Federal Rural de Pernambuco

Bacharelado em Sistemas de Informação

Disciplina: Matemática discreta - Turma SI2 - 2014.2

Professor: Marcelo Gama

1ª Lista de exercícios: Lógica e Conjuntos

Bloco 1. Conhecimentos básicos

1.1. Quais das seguintes afirmações a seguir são proposições e quais não sao?

(a) Recife é a capital de Pernambuco
(b) Não passe por aqui novamente
(c) Ela é feliz
(d) $4 + x = 5$
(e) A lua é feita de queijo
(f) $2^n \geq 100$

1.2. Considere as proposições

p : É permitido nadar na praia de Boa Viagem
q : Foram encontrados tubarões próximos à praia

Expresse cada uma das proposições a seguir como sentenças escritas em português do Brasil.

(a) $\neg q$
(b) $\neg q \to p$
(c) $p \wedge q$
(d) $\neg p \to \neg q$
(e) $\neg p \vee q$
(f) $p \leftrightarrow \neg q$
(g) $p \to \neg q$
(h) $\neg p \wedge (p \vee \neg q)$

1.3. Para cada uma das proposições escreva a negação, a inversa, a recíproca e a contrapositiva

(a) Se um candidato não tiver mais que 50% dos votos haverá um segundo turno.
(b) Se hoje é segunda ou quarta haverá aula de Matemática discreta.
(c) Um inteiro maior que 1 será primo se não tiver divisores além de 1 e de sí mesmo.
(d) Um inteiro é divisível por 2 somente se for par.

1.4. Construa a tabela verdade para cada uma das proposições a seguir

(a) $p \wedge \neg p$
(b) $p \vee \neg p$
(c) $(p \vee \neg q) \to q$
(d) $(q \to q) \to (\neg q \to \neg q)$
(e) $p \to \neg p$
(f) $p \leftrightarrow \neg p$
(g) $p \wedge q \to p \vee q$
(h) $p \oplus p$ ($\oplus$ = *OU exclusivo*)
(i) $(p \wedge q) \vee \neg r$
(j) $(p \to q) \to r$
(k) $(p \to q) \wedge (q \to q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
(l) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

1.5. Calcule cada uma das expressões a seguir

(a) $1\,1000 \wedge (0\,1011 \vee 1\,1011)$
(b) $(0\,1111 \wedge 1\,0101) \vee 0\,1000$
(c) $(0\,1010 \oplus 1\,1011) \oplus 0\,1000$
(d) $(1\,1011 \vee 0\,1010) \wedge (1\,0001 \vee 1\,1011)$

1.6. Considere as proposições

p : "Está nevando" q : "Está congelando"

Reescreva as proposições a seguir usando p, q e conectivos lógicos.

(a) Está congelando e nevando.

(b) Está congelando mas não nevando.
(c) Não está congelando e não está nevando.
(d) Está nevando ou congelando ou ambos.
(e) Se está congelando, também está nevando.
(f) Está congelando ou nevando, mas não está nevando se está congelando.
(g) estar congelando é condição necessária e suficiente para que esteja nevando.

1.7. Escreva, em português, cada uma das sentenças a seguir na forma "se p, então q".

(a) Eu lembrarei de enviar o endereço dela apenas se você enviar um pedido por e-mail.
(b) Para ser um cidadão deste país, é suficiente que você tenha nascido no Brasil.
(c) O livro texto será uma referência bastante útil caso você não se desfaça dele.
(d) O Cruzeiro será o campeão brasileiro caso seus atacantes continuem jogando bem.
(e) Conseguir esse emprego significa que você tem o melhor currículo.
(f) Ocorre erosão do solo sempre que há muita chuva.
(g) É necessário que você tenha uma senha válida para que possa conectar-se ao servidor.
(h) Você não chegará a tempo a menos que saia bem cedo de casa.

1.8. Qual o valor da variável x após cada uma dos comandos abaixo se temos $x = 1$ antes de cada comando?

(a) **if** $1 + 2 = 3$ **then** $x := x + 1$
(b) **if** $(1 + 1 = 3)$ OR $(2 + 2 = 3)$ **then** $x := x + 1$
(c) **if** $(2 + 3 = 5)$ AND $(3 + 4 = 7)$ **then** $x := x + 1$
(d) **if** $(1 + 1 = 2)$ XOR $(1 + 2 = 3)$ **then** $x := x + 1$
(e) **if** $x < 2$ **then** $x := x + 1$

1.9. Use as equivalências lógicas do exercício 2.3 para encontrar a negação de cada uma das seguintes sentenças

(a) Carlos tem a opção de ir de ônibus ou de moto para a aula.
(b) Daniel é bom em cálculo e em matemática discreta.
(c) Se hoje houver aula de matemática discreta então hoje é segunda ou quarta.

1.10. Este sistema de especificações é consistente?

> O sistema está em um estado de multiuso se e somente se estiver operando normalmente. Se o sistema está operando normalmente, o núcleo do sistema operacional (kernel) está funcionando. O kernel não está funcionando ou o sistema está no modo de interrupção. Se o sistema não está em um estado de multiuso, então está em um modo de interrupção. O sistema não está no modo de interrupção.

1.11 (Adaptado de *Linguagem Lógica* de Iole de Freitas Druck - IME - USP)
Chapeuzinho Vermelho ao entrar na floresta, perdeu a noção dos dias da semana. A Raposa e o Lobo Mau eram duas estranhas criaturas que frequentavam a floresta. A Raposa mentia às segundas, terças e quartas-feiras, e falava a verdade nos outros dias da semana. O Lobo Mau mentia às quintas, sextas e sábados, mas falava a verdade nos outros dias da semana.

(a) Um dia Chapeuzinho Vermelho encontrou a Raposa e o Lobo Mau descansando à sombra de uma árvore. Eles disseram:
  - Raposa: Ontem foi um dos meus dias de mentir.

- Lobo Mau: Ontem foi um dos meus dias de mentir.

A partir dessas afirmações, Chapeuzinho Vermelho descobriu qual era o dia dasemana. Qual era?

(b) Em outra ocasião Chapeuzinho Vermelho encontrou o Raposa sozinha, que fez as seguintes afirmações:

- Eu menti ontem.
- Eu mentirei daqui a 3 dias.

Qual era o dia da semana?

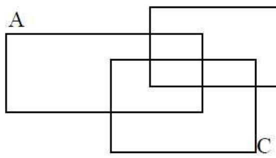
(c) Em qual dia da semana á possível a Raposa fazer as seguintes afirmações?

- Eu menti ontem.
- Eu mentirei amanhã.

(d) Em que dias da semana é possível a Raposa fazer cada uma das seguintes afirmações:

- Eu menti ontem e eu mentirei amanhã.
- Eu menti ontem ou eu mentirei amanhã.
- Se menti ontem, então mentirei de novo amanhã.
- Menti ontem se e somente se mentirei amanhã.

1.12 Na figura abaixo indique os conjuntos que se pede

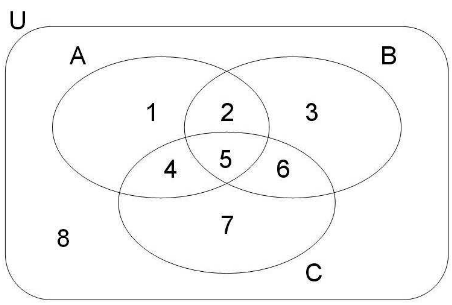


(a) $(A - B) \cap C$ (b) $(A \cup C) \cap \overline{B}$

1.13 Sejam A, B, C conjuntos. Utilizando diagramas de Venn, prove que

(a) $(A - B) \cup (A - C) = A - (B \cap C)$ (b) $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

1.13 Na figura a seguir, os três conjuntos dividem o conjunto universo U em várias regiões. Descreva cada uma dessas regiões em função dos conjuntos A, B e C.



1.14 Determine quais das sentenças a seguir são falsas e quais são verdeiras

(a) $x \in \{x\}$

(b) $\{x\} \subseteq \{x\}$

(c) $\{x\} \in \{x\}$

(d) $\{x\} \in \{\{x\}\}$

(e) $\emptyset \in \{x\}$

1.15 Encontre dois conjuntos A e B de modo que $A \in B$ e $A \subset B$.

1.16 Em cada um dos ítens a seguir, verifique graficamente a igualdade dos conjuntos.

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(b) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$

Bloco 2. Questõers teóricas

2.1. Considere a afirmação "Eu estou mentindo". Vamos provar que ela não é uma proposição.

(a) Faça uma análise detalhada do que ocorre se você supõe que essa afirmação é verdadeira.

(b) Faça uma análise detalhada do que ocorre se você supõe que essa afirmação é falsa.

(c) Qual princípio essa afirmação não satisfaz? (Logo, não podemos considerá-la uma proposição!)

2.2. Em um país distante os habitantes de uma aldeia tem um estranho comportamento. Cada um deles ou mente o tempo todo ou sempre fala a verdade. Quando um turista faz uma pergunta a um dos moradores dessa aldeia ele ouvirá uma das seguintes respostas: SIM ou NÃO. Suponha que você é um turista que coincidentemente está passando perto dessa aldeia e que encontra-se em uma bifurcação na estrada e vê duas placas quebradas no chão. Em uma das placas está escrito "Caminho para a floresta" e na outra "Caminho para a rodovia". Nesse exato momento aparece um morador da aldeia.

(a) Como você descobre qual o caminho para a rodovia fazendo UMA ÚNICA PERGUNTA ao morador? Que pergunta será essa?

(b) Explique detalhadamente o porquê dessa pergunta resolver o problema.

2.3. Prove as seguintes equivalências lógicas

(a) **Dupla negação:** $\neg(\neg p) \equiv p$

(b) **Lei distributiva 1:** $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(c) **Lei distributiva 2:** $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(d) $1^{\underline{a}}$ **lei de De Morgan:** $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

(e) $2^{\underline{a}}$ **lei de De Morgan:** $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

2.4. Prove que a contrapositiva de uma proposição condicional é equivalente à própria proposição.

2.5. Considere os dois seguintes operadores lógicos.

- NAND (Negação da conjunção lógica): É representado pelo conectivo $|$
  $p|q$ (ou p NAND q) será falso somente quando p e q forem verdadeiros.
- NOR (Negação da disjunção lógica): É representado pelo conectivo $\downarrow$
  $p \downarrow q$ (ou p NOR q) será verdadeiro somente quando p e q forem falsos.

(a) Construa as tabelas verdade de NAND e NOR.

(b) Prove que $p|q \equiv \neg(p \wedge q)$

(c) Prove que $p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q)$

(d) Prove que $p \downarrow p \equiv \neg p$

(e) Prove que $(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q) \equiv p \vee q$