UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

MATEMÁTICA DISCRETA - TURMA BSI

1ª VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM (Parte 2) - 2011.2

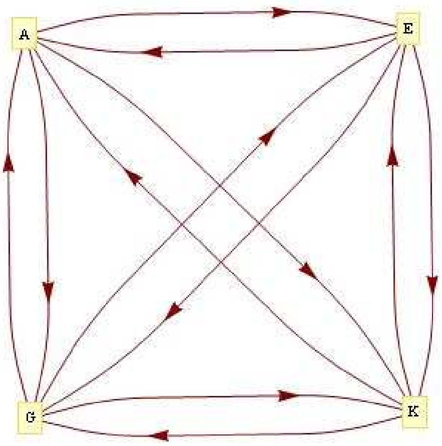
Prof. Marcelo Gama

1. Quatro clubes de futebol amador (ou seja, não profissional) do estado de Pernambuco resolvem fazer um torneio entre sí. São eles:

   - **Alumínio** (de São Caetano)
   - **Galo de Ouro** (de Tabira)
   - **Estreito** (de São José do Egito)
   - **Korujão** (de Carpina)

   Nesse torneio, cada equipe jogará duas vezes contra cada um dos outros adversários. Por exemplo, Alumínio e Korujão jogarão uma partida em São Caetano (Alumínio × Korujão) e outra em Carpina (Korujão × Alumínio).
   Considere o conjunto $S = \{$Alumínio, Estreito, Galo de Ouro, Korujão$\}$.

   (a) Faça o grafo da relação R definida por: $xRy \Leftrightarrow x$ joga contra y.



   (b) Construa a matriz de R.

	A	E	G	K
A	0	1	1	1
E	1	0	1	1
G	1	1	0	1
K	1	1	1	0

   (c) Verifique quais das propriedades a seguir R possui: reflexiva, simétrica, transitiva, anti-reflexiva, anti-simétrica. (Justifique!)

   - Reflexiva: NÃO (Os elementos da diagonal principal não são todos iguais a 1)
   - Anti-reflexiva: SIM (Os elementos da diagonal principal são todos iguais a 0)
   - Simétrica: SIM (Para cada elemento fora da diagonal principal que é igual a 1, seu correspondente simétrico também é igual a 1)

- Anti-simétrica: NÃO (Para cada elemento fora da diagonal principal que é igual a 1, seu correspondente simétrico deveria ser igual a 0)
- Transitiva: NÃO (Temos, por exemplo, $(A, E) \in R$ e $(E, A) \in R$, mas $(A, A) \notin R$)

(d) Faz sentido falar em fecho reflexivo dessa relação? Por quê?
Não faz sentido, porque um time não pode jogar contra sí mesmo.

(e) Qual a relação inversa de R?
Note que

$$\begin{aligned} R = \{&(A, E), (A, G), (A, K), (E, A), (E, G), (E, K), (G, A), (G, E), (G, K), \\ &(K, A), (K, E), (K, G)\} \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} R^{-1} = \{&(E, A), (G, A), (K, A), (A, E), (G, E), (K, E), (A, G), (E, G), (K, G), \\ &(A, K), (E, K), (G, K)\} \end{aligned}$$

Portanto, $R = R^{-1}$, ou seja, R é sua própria inversa!

2. No conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$ é dada uma relação de equivalência ρ, cujas classes de equivalências são: $\{a, b\}$, $\{d, e, f\}$.

(a) Construa todos os pares que fazem parte da relação ρ.

Uma relação de equivalência tem a característica de separar os elementos do conjunto em classes duas a duas disjuntas, isto é, duas classes quaisquer não possuem elemento em comum. Os elementos de uma classe precisam estar todos relacionados de modo a satisfazer as três condições (reflexividade, simetria e transitividade). Além disso, elementos de classes distintas não podem estar relacionados.

A classe $\{a, b\}$ fornece os pares $(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)$.
A classe $\{c, d, e\}$ fornece os pares $(c, c), (d, d), (e, e), (c, d), (d, c), (c, e), (e, c), (d, e), (e, d)$.

Podemos, finalmente, escrever:

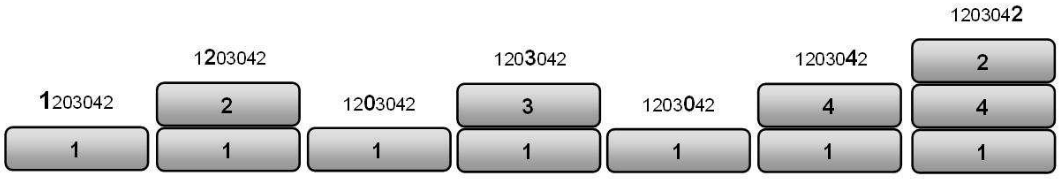
$$\rho = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a), (c, c), (d, d), (e, e), (c, d), (d, c), (c, e), (e, c), (d, e), (e, d)\}$$

(b) Qual a inversa da relação ρ? Essa inversa, ρ^{-1}, é uma relação de equivalência? Em caso afirmativo, quais as suas classes de equivalência?

Note que $\rho = \rho^{-1}$. Portanto, ρ^{-1} também é uma relação de equivalênciae suas classes são as mesmas de ρ:

$$\overline{a} = \overline{b} = \{a, b\} \qquad \text{e} \qquad \overline{c} = \overline{d} = \overline{e} = \{c, d, e\}$$

3. Uma determinada função toma como entrada cadeias de inteiros não negativos. À medida que lermos da esquerda para direita, aplicamos a instrução **empilhar** a qualquer caracter diferente de zero. Caracteres zero causam a instrução **desempilhar**. A saída produzida pela função é a sequência de caracteres que restaram (do topo para baixo) ou zero se a pilha ficar vazia.



(a) Qual o domínio dessa função? Qual o conjunto imagem?

Chamaremos essa função de f. A única restrição existente em f é que ela não pode desempilhar blocos se a pilha de blocos estiver vazia. Essa situação ocorre com o número $n \in \mathbb{N}$ sempre que, escrevendo os algarismos de n da esquerda para a direita, em algum momento tivermos mais "zeros" do que algarismos positivos. Portanto,

$$D(f) = \{n \in \mathbb{N} | \text{da direita para a esquerda nunca tem mais zeros que algarismos positivos}\}$$

Agora vamos as possíveis imagens que são fornecidas pela função f:

- O número zero aparece como imagem quando a pilha fica vazia.
- Qualquer número que não contenha algarismo zero aparece como sua própria imagem, porque sem zeros nenhum bloco será desempilhado. Por exemplo,

$$f(28314735) = 28314735$$

- Algarismos zeros não aparecem na saída; são usados apenas para desempilhar.

Portanto,

$$Im(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ não tem algarismo zero}\} \cup \{0\} \quad (\text{“0” para pilhas vazias})$$

(b) Essa função é injetiva? ~~É sobrejetiva?~~

Obs.: A questão referente à sobrejetividade de f foi cancelada, pois não foi fornecido seu contra-domínio.

Uma função é injetiva (ou injetora) quando elementos diferentes no domínio sempre fornecem imagens diferentes. Isto não é o que acontece com essa função. Temos, por exemplo

- $f(120) = f(130) = \ldots = f(190) = 1$
- $f(1200) = f(2500) = f(7400) = \ldots = f(ab00) = 0$, onde a e b são quaisquer algarismos entre 1 e 9.

(c) Encontre uma cadeia que não possa ser processada mas que possa ser processada se escrita "de trás para frente".

Não podemos calcular, por exemplo, a imagem do número 100123, mas $f(321001) = 13$

Boa prova!