UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

MATEMÁTICA DISCRETA - TURMA BSI

1ª VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM (Parte 1) - 2011.2

Prof. Marcelo Gama

Escolha apenas quatro das questões a seguir

1. Considere a sentença: *A soma de dois inteiros ímpares é um inteiro par*

   (a) Escreva essa sentença na forma "se ... então".
   Se dois inteiros são ímpares, então sua soma é par.

   (b) Dê uma prova dessa afirmação usando a técnica de "redução ao absurdo".
   Suponha que os inteiros $x = 2a + 1$ e $y = 2b + 1$ são ímpares, mas sua soma é ímpar.
   Nesse caso, teremos

$$\begin{aligned} x + y = 2c + 1 &\Rightarrow (2a + 1) + (2b + 1) = 2c + 1 \\ &\Rightarrow 2a + 2b - 2c = -1 \\ &\Rightarrow 2(a + b - c) = -1 \\ &\Rightarrow a + b - c = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Isto não pode acontecer, pois $a + b - c$ é um número inteiro.

   (c) Qual a contrapositiva da afirmação feita no item (a)? Prove a afirmação acima através da contrapositiva.
   Contrapositiva:
   Se a soma de dois inteiros é ímpar, então esses inteiros não podem ser ambos ímpares.
   Temos $x + y = 2c + 1$
   Se $x = 2a + 1$ é ímpar, teremos $y = (2c + 1) - x = (2c + 1) - (2a + 1) = 2c - 2a$ par
   Se $y = 2b + 1$ é ímpar, teremos $x = (2c + 1) - y = (2c + 1) - (2b + 1) = 2c - 2b$ par
   Portanto, x e y não serão ambos ímpares.

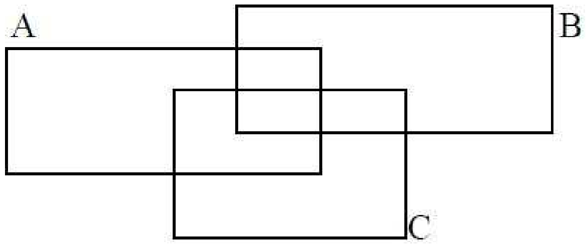
2. Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo. Em seguida, apresente a negação dessas sentenças.

   (a) $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)$ (Verdadeira. Para cada x, basta fazer $y = -x$)
   Negação: $(\exists x)(\forall y)(x + y \neq 0)$

   (b) $(\exists x)(\forall y)(x + y = y)$ (Verdadeira. x é o elemento neutro da adição, ou seja, zero.)
   Negação: $(\forall x)(\exists y)(x + y \neq 0)$

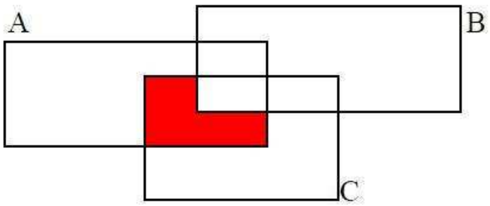
   (c) $(\forall x)(\forall y)(x + y = 0)$ (Falsa. Faça, por exemplo, $x = 1$ e $y = 1$)
   Negação: $(\exists x)(\exists y)(x + y \neq 0)$

3. Na figura abaixo indique os conjuntos que se pede

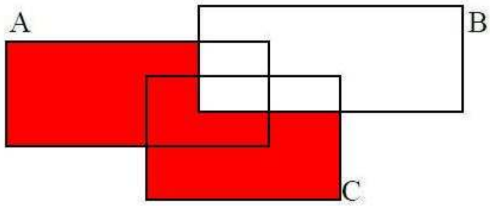


(a) $(A - B) \cap C$

(b) $(A \cup C) \cap \overline{B}$



(a) $(A - B) \cap C$



(b) $(A \cup C) \cap \overline{B}$

4. Prove que

(a) $A - (B - A) = A \cap B$

(b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$$\begin{aligned} x \in A - (A - B) &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \notin A - B \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \in \overline{A \cap B} &\Leftrightarrow y \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow y \notin A \text{ ou } y \notin B \\ &\Leftrightarrow y \in \overline{A} \text{ ou } y \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow y \in \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}$$

5. A operação lógica *ou exclusivo*, denotada por $p \bigoplus q$, é verdadeira quando p ou q é verdadeira, mas não ambos. Nos outros casos $p \bigoplus q$ é falsa.

(a) Faça a tabela verdade de $p \bigoplus q$

p	q	$p \bigoplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

(b) Prove a equivalência lógica $(p \bigoplus q) \bigoplus q \Leftrightarrow p$

p	q	$p \bigoplus q$	$(p \bigoplus q) \bigoplus p$
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

(c) A equivalência acima permite codificar mensagens. A palavra "eu" em binário é dada por p = 01100101 01110101. Escolha uma senha q em binário, do mesmo tamanho de p, e codifique cada dígito de p como sendo $p_i \bigoplus q_i$.

Escolha uma senha aleatoriamente. Usarei q =10001110 11010110.

Codificação																
p_i	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
q_i	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0
$p_i \bigoplus q_i$	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1

A palavra codificada será 1110101110100011

(d) Use a mesma senha q para obter p de volta através da equivalência em (b).

Decodificação																
$p_i \bigoplus q_i$	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1
q_i	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0
p_i	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1

Obtemos novamente a palavra incial p : 0110010101110101