UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA

MATEMÁTICA DISCRETA – 2011.2

Prof. Marcelo Gama

5ª LISTA DE EXERCÍCIOS

<<< **Divisibilidade** >>>

1. Quantos são os múltiplos de 13 formados por 4 algarismos?

2. Explique o porquê:

   (a) O produto de dois inteiros consecutivos é divisível por 2

   (b) O produto de três inteiros consecutivos é divisível por 6

   (c) O produto de quatro inteiros consecutivos é divisível por 24

3. Mostre que o quadrado de um inteiro é da forma $4k$ ou $4k+1$.
   (*Sugestão*: Considere, separadamente, números pares e números ímpares.)

4. Mostre que

   (a) $n^2 - n$ é divisível por 2

   (b) $n^3 - n$ é divisível por 6

   (c) $n^5 - n$ é divisível por 30

5. Mostre que $n^2 - 1$ é divisível por 8, se n é ímpar.
   (*Sugestão*: Faça $n = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$)

6. Tome dois inteiros a e b. Eleve-os ao quadrado e some os resultados, obtendo $a^2 + b^2$. Mostre que esse número nunca deixa resto 3 na divisão por 4.
   (*Sugestão*: Use o exercício 3.)

7. Em quantos zeros termina 100! ?

8. Fatore completamente o número 20!

9. Seja $n > 0$ um inteiro composto. Mostre que n tem algum fator primo p, tal que $p \leq \sqrt{n}$.
   (*Sugestão*: Como n é composto, faça $n = a \cdot b$, com $1 \leq a, b \leq n$. Agora suponha que $a, b > \sqrt{n}$)

10. Utilizando o exercício anterior, mostre que

    (a) 1601 é primo

    (b) 1247 não é primo

11. Seja $p > 5$ um número primo. Faça $p = 10k + r$, onde r é o resto da divisão de p por 10.
    (a) Quais os possíveis valores de r?
    (b) Utilizando o item anterior, mostre que o quarado de qualquer primo maior que 5 só pode deixar resto 1 ou 9 na divisão por 10.

<<< **Máximo divisor comum** >>>

12. Utilizando o algoritmo euclideano, calcule
    (a) mdc(21,13) (b) mdc(120,54) (c) mdc(10000,2840)
13. Refaça o exercício anterior utilizando menores erros absolutos (nesse caso, os “restos” podem ser negativos).
14. No algoritmo euclideano para o cálculo do mdc, qual a relção entre os quocientes (grandes ou pequenos) obtidos nas divisões e o número total de divisões efetuadas? A partir dessa informação, encontre uma sequência de números $a_1, a_2, a_3, \ldots$, começando com $a_1 = a_2 = 1$, onde se obtém o maior número possível de divisões no cálculo de mdc(a_n, a_{n+1}). Você reconhece esta sequência?

<<< **Congruências** >>>

15. Liste todos os inteiros positivos menores do que 100 que são congruentes com 7 módulo 13.
16. Se no dia x do mês y do ano z for um quarta-feira, que dia de semana é o dia x do mês y do ano $z + 1$?
17. Qual o resto da divisão de a por n, sendo:
    (a) $a = 6789032453$ e $n = 11$
    (b) $a = 33333 \times 44444 \times 55555 \times 66666$ e $n = 20$
    (c) $a = 2^{30} - 1234$ e $n = 10$
    (d) $a = 2^{70} + 3^{70}$ e $n = 13$
    (e) $a = 20!$ e $n = 1200$
18. Qual o último algarismo (algarismo das unidades) de 23^{34}, 101^{50} e 99^{50}?
19. Quais os dois últimos algarismos de 23^{34}, 101^{50} e 99^{50}?
20. Em navio 9 piratas estavam a dividir entre sí certa quantidade de moedas de ouro, roubadas recentemente em um ataque a outro navio. Na hora da partilha sobra uma moeda e cada pirata mostra seus argumentos para justificar porque deveria ficar com ela. Na confusão que se segue, um dos piratas morre. Minutos depois, todos refeitos e defunto jogado ao mar, eles iniciam uma nova divisão entre os 8 piratas restantes. Novamente sobra uma moeda e sobra mais ainda disposição para lutar por ela. Outro pirata morto e, depois da cunfusão, incia-se uma nova tentativa de divisão entre os 7 piratas restantes. Novamente sobra uma moeda, mas desta vez uma forte onda inclina o navio fazendo com que (exatamente!) uma moeda caia no mar.
    Sabendo que o número total de moedas estava entre 500 e 1000, quantas moedas eles estavam a dividir?

Bom estudo!