UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA

MATEMÁTICA DISCRETA – 2011.2

Prof. Marcelo Gama

4ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Mostre, por indução, que para todo natural n

   (a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   (b) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

   (c) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

   (d) $2^n > n$

   (e) $n! > 2^n$, para $n \geq 4$

2. Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência de números reais (a_n) de modo que a_1 é dado e, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se
$$a_{n+1} = a_n + r,$$
onde r é um número real fixo, chamado de razão da PA.

   (a) Mostre, por indução, que $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$

   (b) Sendo $S_n = a_1 + \ldots + a_n$, mostre, por indução, que $S = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$

3. Uma progressão geomética (PG) é uma sequência de números reais (a_n) de modo que a_1 é dado e, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se
$$a_{n+1} = a_n \cdot q,$$
onde q é um número real fixo, com $q \neq 0$ e $q \neq 1$, chamado de razão da PG.

   (a) Mostre, por indução, que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

   (b) Sendo $S_n = a_1 + \ldots + a_n$, mostre, por indução, que $S = \frac{a_1\cdot(1-q^n)}{1-q}$

4. Para cada uma das funções a seguir é dado $f_i(0) = 1$ e, para $n = 0, 1, 2, \ldots$

   - $f_1(n+1) = f(n) + 2$
   - $f_2(n+1) = 3f(n)$
   - $f_3(n+1) = 2^{f(n)}$
   - $f_4(n+1) = f(n)^2 + f(n) + 1$

   (a) Para cada uma dessas funções, calcule $f(1), f(2), f(3), f(4)$

   (b) Encontre formulas fechadas para as funções f_1 e f_2 e, em seguida, prove a validade dessas fórmulas por indução.

5. Encontre uma definição recursiva para cada uma das seguintes sequências:

(a) $a_n = 6n$

(b) $b_n = 2n + 1$

(c) $c_n = 10^n$

(d) $d_n = 3$

(e) $s_n = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n$

(f) $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$

(g) $u_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

(e) $s_n = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n$

6. Esse exercício tem a finalidade de mostrar um procedimento recursivo para procurar um item armazenado numa estrutura de árvore binária. O caso base ocorre quando você está em um nó que contém o valor procurado; nesse caso, o valor lá encontrado é o procurado. Caso o valor procurado seja menor que o encontrado no nó, deve-se procurar na sub-árvore à esquerda e, caso seja maior, na sub-árvore da direita. Descreva uma função $Busca(n)$ que procura, recursivamente, um valor n em uma árvore binária.