UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA

MATEMÁTICA DISCRETA – 2011.2

Prof. Marcelo Gama

1ª LISTA DE EXERCÍCIOS

Cálculo proposicional

1. Um estudante (muito) desatento utilizou conectivos de forma errada para escrever as proposições a seguir. Escreva corretamente cada uma dessas proposições (pode haver mais de uma forma correta):

   (a) $x \neg < y$
   $\neg(x < y)$

   (b) $0 < x \wedge y$
   $(0 < x) \wedge (0 < y)$

   (c) $x > 0 \neg \to x > 1$
   $\neg(x > 0 \to x > 1)$

   (d) $x \neg = 0 \to x^2 \neg = 0$
   $\neg(x = 0) \to \neg(x^2 = 0)$

2. Quais das sentenças a seguir são proposições e quais não são?

   (a) Mouse pode ser um animal ou um acessório para computadores. (Sim)

   (b) Você volta logo? (Não)

   (c) Não sei porque você não gosta de estudar. (Não)

   (d) Quem não tem pecado atire a primeira pedra! (Não)

3. Para cada proposição a seguir, encontre as proposições atômicas $P, Q, R, \ldots$. Em seguida, escreva cada uma utilizando a linguagem simbólica da lógica proposicional, observando o emprego correto dos conectivos.

   (a) Não é o caso que se $\underbrace{\text{está chovendo}}_{P}$ então $\underbrace{\text{está nevando}}_{Q}$. $\neg(P \to Q)$

   (b) Se não $\underbrace{\text{está chovendo}}_{P}$, então não é o caso que $\underbrace{\text{está nevando}}_{Q}$ e $\underbrace{\text{está chovendo}}_{P}$. $\neg P \to \neg(Q \wedge P)$

   (c) Para que eu vá $\underbrace{\text{(ir) ao cinema}}_{P}$ basta que não $\underbrace{\text{chova}}_{Q\ \text{(chove)}}$. $\neg Q \to P$

   (d) $\underbrace{\text{Vou à praia}}_{P}$, com ou sem $\underbrace{\text{chuva}}_{Q\ \text{(chove)}}$. $(Q \vee \neg Q) \to P$

4. Reescrever as proposições a seguir utilizando a linguagem simbólica da lógica proposicional:

(a) Ou $\underbrace{x^2 + y^2 > 0}_{P}$ ou tem-se simultaneamente $\underbrace{x = 0}_{Q}$ e $\underbrace{y = 0}_{R}$. $P \vee (Q \wedge R)$

(b) $\underbrace{\text{O número } x \text{ é maior que pelo menos um dos números } y \text{ ou } z}_{P:\, x>y \quad Q:\, x>z}$. $P \vee Q$

(c) $\underbrace{3x = 6}_{P}$ quando $\underbrace{2x = 4}_{Q}$. $Q \to P$

(d) $\underbrace{\text{A raiz quadrada de um número } x \text{ é positiva}}_{P}$, $\underbrace{\text{quer ele seja positivo}}_{Q:\, x>0}$, $\underbrace{\text{quer ele seja negativo}}_{R:\, x<0}$.

$(Q \vee R) \to P$

5. Considere as seguintes proposições:

$$A: \text{“}\textit{Ana vai}\text{”} \qquad B: \text{“}\textit{Bia vai}\text{”} \qquad C: \text{“}\textit{Carla vai}\text{”} \qquad D: \text{“}\textit{Dany vai}\text{”}$$

Escreva em linguagem simbólica as proposições a seguir:

(a) Ana vai somente se Carla vai. $C \to A$

(b) Carla não vai, mas Bia e Dany vão. $\neg C \wedge (B \wedge D)$

(c) Se nem Ana nem Dany vão, então Carla vai. $(\neg A \wedge \neg D) \to C$

(d) Se Ana vai, então Dany ou Bia vai, e se Ana não vai, então Bia e Carla vão.
$(A \to (D \vee B)) \wedge (\neg A \to (B \wedge C))$

6. Determinar o valor lógico de cada uma das proposiçõoes abaixo:

(a) $\underbrace{\text{Os carros são todos azuis}}_{P:\, F}$ e se $\underbrace{\text{não é verdade que Lula é o presidente do Brasil}}_{Q:\, V}$, então $\underbrace{\text{a Capital de Pernambuco é Olinda}}_{R:\, F}$.

$P \wedge (Q \to R) \iff F \wedge (V \to F) \iff F \wedge F \iff F$

(b) $\underbrace{\text{Brasil tem sete letras}}_{P:\, F}$ quando $\underbrace{2 + 2 = 3}_{Q:\, F}$

$Q \to P \iff F \to F \iff V$

(c) Se $\underbrace{\text{não é verdade que} \sqrt{16} = 3}_{P:\, V}$, então $\underbrace{2 < 7}_{Q:\, V}$ se, e somente se, $\underbrace{1 \neq 0}_{R:\, V}$.

$P \to (Q \leftrightarrow R) \iff V \to (V \leftrightarrow V) \iff V \to V \iff V$

(d) $(\underbrace{\neg\sqrt{2} < 0}_{V} \wedge \underbrace{\cos 45^\circ = 1}_{F}) \leftrightarrow \neg(\underbrace{\sqrt{2} \geq 0}_{V} \vee \underbrace{\neg(1 + 1 = 3)}_{V})$

$(V \wedge F) \leftrightarrow \neg(V \vee V) \iff F \leftrightarrow \neg V \iff F \leftrightarrow F \iff V$

7. Marcos, Paulo e Roberto são três políticos suspeitos de participarem de uma fraude. Quando interrogados sobre o fato, afirmaram:

M : "Marcos participou" P : "Paulo participou" R : "Roberto participou"

- Marcos: Paulo participou, mas Roberto não.
  $P \wedge \neg R$
- Paulo: Se Marcos não participou, então Roberto também não participou.
  $\neg M \to \neg R$
- Roberto: Eu não participei mas, pelo menos um dos outros dois não participou.
  $\neg R \wedge (\neg M \vee \neg P)$

Baseado nessas informações, responda às seguintes questões:

(a) Supondo que os três depoimentos são verdadeiros, descubra quem participou da fraude.
$v(P \wedge \neg R) = V \Rightarrow v(P) = V$ e $v(R) = F$ (Paulo participou e Roberto não participou)
$\neg R \wedge (\neg M \vee \neg P) \Rightarrow v(\neg M \vee \neg P) = V \Rightarrow v(M) = F$ (Marcos não participou)

(b) Caso os três tenham participado da fraude, quem está mentindo e quem fala a verdade?
Se os três participaram: $v(M) = v(P) = v(R) = V$
Marcos: $v(P \wedge \neg R) = V \wedge \neg V = V \wedge F = F$ (está mentindo)
Paulo: $v(\neg M \to \neg R) = \neg V \to \neg V = F \to F = V$ (falou a verdade)
Roberto: $v(\neg R \wedge (\neg M \vee \neg P)) = \neg V \wedge (\neg V \vee \neg V) = F \wedge (F \vee F) = F \wedge F = F$

8. Prove, usando tabelas-verdade, **apenas quatro** das seguintes equivalências lógicas especias:

(a) Dupla negação: $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$

(b) Idempotência conjuntiva: $P \wedge P \Leftrightarrow P$

(c) Idempotência disjuntiva: $P \vee P \Leftrightarrow P$

		(a)	(b)	(c)
P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$	$P \wedge P$	$P \vee P$
V	F	V	V	V
F	V	F	F	F

(d) Comutatividade da conjunção: $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

(e) Comutatividade da disjunção: $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$

		(d)		(e)	
P	Q	$P \wedge Q$	$Q \wedge P$	$P \vee Q$	$Q \vee P$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	F	F

(f) Associatividade da conjunção: $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

(g) Associatividade da disjunção: $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$

(h) Distributividade da conjunção em relação à disjunção: $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

(i) Distributividade da disjunção em relação à conjunção: $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

(j) Lei de Morgan 1 : $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

(k) Lei de Morgan 2: $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

(l) Lei da condicional: $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

(m) Lei da bicondicional 1: $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

(n) Lei da bicondicional 2: $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

(o) Lei da contraposição: $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$

(p) Lei da absorção: $P \wedge (P \to Q) \Leftrightarrow P \to Q$

(q) Lei de Clavius: $\neg P \to P \Leftrightarrow P$

(r) Lei do dilema: $(P \to Q) \wedge (\neg P \to Q) \Leftrightarrow Q$

(s) Lei da refutação por absurdo: $(P \to Q) \wedge (P \to \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$

(t) Lei da demonstração por absurdo: $(P \wedge \neg Q) \to R \Leftrightarrow P \to Q$ (onde R é uma contradição)

Quantificadores

9. Interprete cada uma das fórmulas abaixo e descreva a interpretação em português:

- $A(x)$: x é aluno do BSI.
- $M(x)$: x estuda matemática discreta.
- $P(x)$: x estuda programação.

(a) $(\forall x)(A(x) \wedge M(x) \to \neg P(x))$

(b) $(\exists x)(A(x) \wedge M(x) \wedge P(x))$

(c) $\neg(\exists x)(A(x) \wedge \neg E(x) \wedge \neg P(x))$

(d) $(\forall x)(M(x) \vee P(x) \to A(x))$

10. São dados os seguintes predicados:

- $P(x, y)$: x é pai de y.
- $M(x, y)$: x é mãe de y.
- $C(x, y)$: x é casado (ou casada) com y.

Usando esses predicados e quantificadores apropriadamente escolhidos, escreva **apenas seis** das declarações a seguir como fbf's. (Tome o conjunto universo como sendo o conjunto de todas pessoas do mundo.)

(a) *Carla* é avó de *Beto*.

(b) x é filho de y.

(c) x é irmão de y.

(d) x é tia de y.

(e) x é primo de y.

(f) x é tia de y.

(g) x é sogro de y.

(h) x é nora de y.

(i) x é cunhado de y.

(j) x é pai de um filho fora do casamento.

(k) Todos os filhos e filhas de x já tem filhos.

Métodos de prova (identificar o método utilizado)

11. Prove que a equação $x^2 + y^2 = 6$ não tem solução inteira.

12. Prove que nem todo número da forma $2^n - 1$, com $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, é primo.

13. Prove que se n é um inteiro ímpar, então n^2 deixa resto 1 na divisão por 4.

14. Prove que se a e b são inteiros e $a \cdot b$ é ímpar, então a e b são ímpares.

15. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Prove que $a + b$ é par se, e somente se, a e b são ambos pares ou ambos ímpares.