BACHARELADO EM SISTEMAS DE INFORMAÇÃO

MATEMÁTICA DISCRETA

Aula 5 - Introdução à teoria dos conjuntos

Prof. Marcelo Gama

Universidade Federal Rural de Pernambuco - DM

1 de Setembro de 2011

Sumário

Conjuntos

Um conjunto é uma coleção de objetos que serão chamados de elementos. Normalmente, conjuntos são denotados por letras latinas maiúsculas, mas em alguns casos são empregados símbolos especiais.

Observações:

- Não importa a ordem dos elementos dentro do conjunto.
- Os elementos de um conjunto não podem aparecer repetidos.

Representação de conjuntos

Existem duas formas de representar um conjunto

- **Extensão:** Lista dos elementos do conjunto.
- **Compreensão:** Os elementos são dados por uma propriedade que os caracteriza.

Exemplos

- **Extensão:** $A = \{\text{a, e, i, o, u}\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$, $C = \{\text{verde, amarelo, azul, branco}\}$
- **Compreensão:** $P = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ é par}\}$, $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$, $C = \{x | x \text{ é cor da bandeira brasileira}\}$.

Relação entre elemento e conjunto

Entre um elemento e conjunto existe a relação de pertinência.

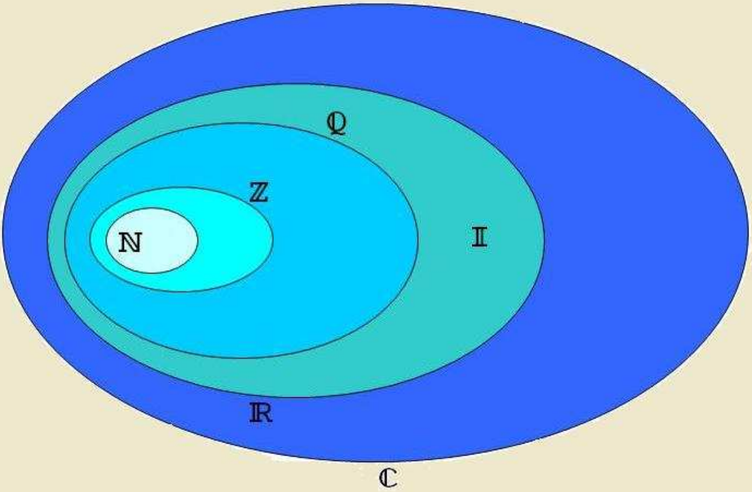
- Quando um elemento está em um conjunto, dizemos que ele pertence a este conjunto. Indicamos isso com o símbolo $\in$.
- Quando um elemento não está em um conjunto, dizemos que ele nao pertence a este conjunto. Indicamos isso com o símbolo $\notin$.

Exemplos

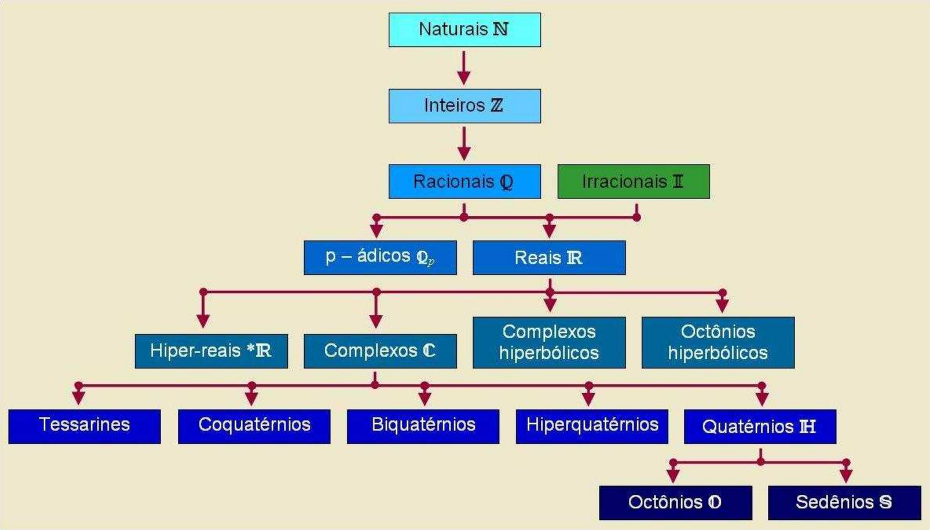
- $\text{a} \in \{\text{a, e, i, o, u}\}$
- $\text{azul} \in \{\text{verde, amarelo, azul, branco}\}$
- $3 \notin \{x \in \mathbb{Z} | x \text{ é par}\}$
- $-5 \notin \mathbb{R}_+^*$

- **Vazio:** $\emptyset$ ou $\{\}$
- **Números naturais:** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
- **Naturais positivos:** $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
- **Números inteiros:** $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- **Inteiros não nulos:** $\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$
- **Inteiros positivos:** $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- **Inteiros não negativos:** $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- **Inteiros negativos:** $\mathbb{Z}_-^* = \{-1, -2, -3, \ldots\}$
- **Inteiros não positivos:** $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$
- **Números racionais:** $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}^*\}$
- **Números reais:** $\mathbb{R} = \{x | x = n.a_1 \cdots a_k \vee x = n.a_1 a_2 \cdots$, com $n \in \mathbb{Z}$ e $a_1, a_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}\}$
- **Números irracionais:** $\mathbb{I} = \{x | (x \in \mathbb{R}) \wedge (x \notin \mathbb{Q})\}$
- **Números complexos:** $\mathbb{C} = \{x | (x = a + bi) \wedge (a, b \in \mathbb{R}) \wedge (i^2 = -1)\}$

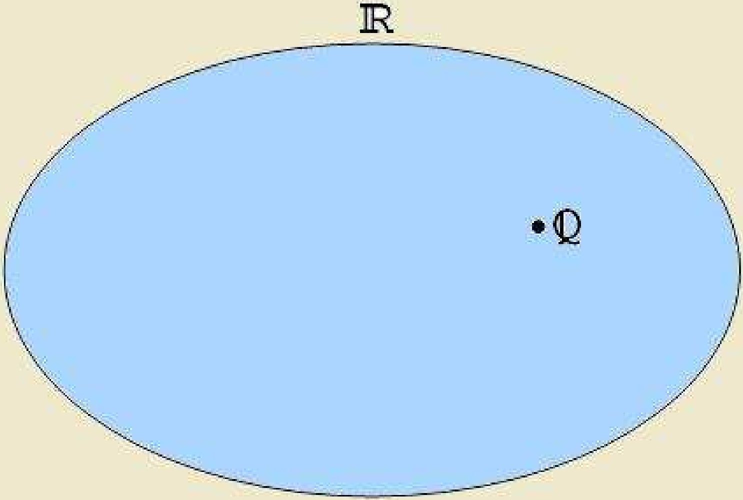
Hierarquia dos conjuntos numéricos



A matemática é bem maior do que podemos imaginar!



Real comparação entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$



Alfabetos e palavras

- Alfabeto é um conjunto finito Σ. Os elementos de um alfabeto são símbolos ou caracteres.
- Uma palavra ou string sobre o alfabeto Σ é uma sequência finita de símbolos de Σ.
- O conjunto de todas as palavras sobre Σ será denotato por Σ^*.

Exemplos:

- $\emptyset$ é um alfabeto
- $\{x, y, z\}$ é um alfabeto
- $xyyxzy$ é uma palavra sobre $\{x, y, z\}$
- ε é a palavra vazia
- ε é uma palavra sobre $\emptyset$
- $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ não são alfabetos (por quê?)

Linguagem formal

Uma linguagem formal L é um conjunto de palavras sobre um alfabeto Σ, ou seja, $L \subset \Sigma^*$.

Exemplos:

- Uma linguagem de programação é o conjunto de todos os programas possíveis.
- Um programa é uma palavra sobre a linguagem de programação.

Relação de inclusão

Inclusão

- A está contido (incluso) em B quando todos os elementos de A também fazem parte de B.
- Dizemos tambem que A é subconjunto de B
- Denotamos isto por $A \subset B$.
- Nesse caso, também dizemos que B contém A e denotamos isto por $B \supset A$.

Formalmente, $(A \subset B) \leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

Exemplos:

- $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$
- $(\forall A)(A \subset A)$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $(\forall X)(\emptyset \subset X)$

Relação de inclusão

Não inclusão

Um conjunto A não está contido em um conjunto B, quando existe pelo menos um elementos de A que não pertence a B. Denotamos isto por $A \nsubseteq B$. Formalmente,

$$(A \nsubseteq B) \leftrightarrow (\exists x)(x \in A \land x \notin B)$$

Exemplos:

- $\{1, 2, 3\} \nsubseteq \{1, 2\}$
- $\mathbb{Z} \nsubseteq \mathbb{N}$

Igualdade entre conjuntos

Definição de igualdade

Dois conjuntos são iguais quando eles possuem exatamente os mesmos elementos. Outra forma de dizer isto é,

$$(A = B) \leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A))$$

Exemplos:

- $\{x \in \mathbb{N} | x \text{ é par}\} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$
- $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 < 0\}$

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$ (V)

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$ (V)
5. $\emptyset \in X$

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$ (V)
5. $\emptyset \in X$ (V)

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$ (V)
5. $\emptyset \in X$ (V)
6. $\emptyset \subset X$

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$ (V)
5. $\emptyset \in X$ (V)
6. $\emptyset \subset X$ (V)

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$ (V)
5. $\emptyset \in X$ (V)
6. $\emptyset \subset X$ (V)
7. $\{1, 2\} \in X$

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$ (V)
5. $\emptyset \in X$ (V)
6. $\emptyset \subset X$ (V)
7. $\{1, 2\} \in X$ (V)

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$ (V)
5. $\emptyset \in X$ (V)
6. $\emptyset \subset X$ (V)
7. $\{1, 2\} \in X$ (V)
8. $\{1, 2\} \subset X$

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$ (V)
5. $\emptyset \in X$ (V)
6. $\emptyset \subset X$ (V)
7. $\{1, 2\} \in X$ (V)
8. $\{1, 2\} \subset X$ (V)

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$ (V)
5. $\emptyset \in X$ (V)
6. $\emptyset \subset X$ (V)
7. $\{1, 2\} \in X$ (V)
8. $\{1, 2\} \subset X$ (V)
9. $\{1, 3\} \in X$

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$ (V)
5. $\emptyset \in X$ (V)
6. $\emptyset \subset X$ (V)
7. $\{1, 2\} \in X$ (V)
8. $\{1, 2\} \subset X$ (V)
9. $\{1, 3\} \in X$ (F)

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$ (V)
5. $\emptyset \in X$ (V)
6. $\emptyset \subset X$ (V)
7. $\{1, 2\} \in X$ (V)
8. $\{1, 2\} \subset X$ (V)
9. $\{1, 3\} \in X$ (F)
10. $\{1, 3\} \subset X$

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$ (V)
5. $\emptyset \in X$ (V)
6. $\emptyset \subset X$ (V)
7. $\{1, 2\} \in X$ (V)
8. $\{1, 2\} \subset X$ (V)
9. $\{1, 3\} \in X$ (F)
10. $\{1, 3\} \subset X$ (V)

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$ (V)
5. $\emptyset \in X$ (V)
6. $\emptyset \subset X$ (V)
7. $\{1, 2\} \in X$ (V)
8. $\{1, 2\} \subset X$ (V)
9. $\{1, 3\} \in X$ (F)
10. $\{1, 3\} \subset X$ (V)
11. $\{a\} \subset X$

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$ (V)
5. $\emptyset \in X$ (V)
6. $\emptyset \subset X$ (V)
7. $\{1, 2\} \in X$ (V)
8. $\{1, 2\} \subset X$ (V)
9. $\{1, 3\} \in X$ (F)
10. $\{1, 3\} \subset X$ (V)
11. $\{a\} \subset X$ (F)

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$ (V)
5. $\emptyset \in X$ (V)
6. $\emptyset \subset X$ (V)
7. $\{1, 2\} \in X$ (V)
8. $\{1, 2\} \subset X$ (V)
9. $\{1, 3\} \in X$ (F)
10. $\{1, 3\} \subset X$ (V)
11. $\{a\} \subset X$ (F)
12. $\{a, b\} \subset X$

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$ (V)
5. $\emptyset \in X$ (V)
6. $\emptyset \subset X$ (V)
7. $\{1, 2\} \in X$ (V)
8. $\{1, 2\} \subset X$ (V)
9. $\{1, 3\} \in X$ (F)
10. $\{1, 3\} \subset X$ (V)
11. $\{a\} \subset X$ (F)
12. $\{a, b\} \subset X$ (F)

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$ (V)
5. $\emptyset \in X$ (V)
6. $\emptyset \subset X$ (V)
7. $\{1, 2\} \in X$ (V)
8. $\{1, 2\} \subset X$ (V)
9. $\{1, 3\} \in X$ (F)
10. $\{1, 3\} \subset X$ (V)
11. $\{a\} \subset X$ (F)
12. $\{a, b\} \subset X$ (F)
13. $\{\{a, b\}\} \subset X$

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$ (V)
5. $\emptyset \in X$ (V)
6. $\emptyset \subset X$ (V)
7. $\{1, 2\} \in X$ (V)
8. $\{1, 2\} \subset X$ (V)
9. $\{1, 3\} \in X$ (F)
10. $\{1, 3\} \subset X$ (V)
11. $\{a\} \subset X$ (F)
12. $\{a, b\} \subset X$ (F)
13. $\{\{a, b\}\} \subset X$ (V)

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$ (V)
5. $\emptyset \in X$ (V)
6. $\emptyset \subset X$ (V)
7. $\{1, 2\} \in X$ (V)
8. $\{1, 2\} \subset X$ (V)
9. $\{1, 3\} \in X$ (F)
10. $\{1, 3\} \subset X$ (V)
11. $\{a\} \subset X$ (F)
12. $\{a, b\} \subset X$ (F)
13. $\{\{a, b\}\} \subset X$ (V)
14. $\emptyset \subset \emptyset$

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$ (V)
5. $\emptyset \in X$ (V)
6. $\emptyset \subset X$ (V)
7. $\{1, 2\} \in X$ (V)
8. $\{1, 2\} \subset X$ (V)
9. $\{1, 3\} \in X$ (F)
10. $\{1, 3\} \subset X$ (V)
11. $\{a\} \subset X$ (F)
12. $\{a, b\} \subset X$ (F)
13. $\{\{a, b\}\} \subset X$ (V)
14. $\emptyset \subset \emptyset$ (V)

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$ (V)
5. $\emptyset \in X$ (V)
6. $\emptyset \subset X$ (V)
7. $\{1, 2\} \in X$ (V)
8. $\{1, 2\} \subset X$ (V)
9. $\{1, 3\} \in X$ (F)
10. $\{1, 3\} \subset X$ (V)
11. $\{a\} \subset X$ (F)
12. $\{a, b\} \subset X$ (F)
13. $\{\{a, b\}\} \subset X$ (V)
14. $\emptyset \subset \emptyset$ (V)
15. $\emptyset = \{\emptyset\}$

Verdadeiro (V) ou falso (F)?

Seja $X = \{0, 1, 2, 3, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{a, b\}\}$

1. $0 \notin X$ (F)
2. $0 \subset X$ (F)
3. $\{0\} \in X$ (V)
4. $\{0\} \subset X$ (V)
5. $\emptyset \in X$ (V)
6. $\emptyset \subset X$ (V)
7. $\{1, 2\} \in X$ (V)
8. $\{1, 2\} \subset X$ (V)
9. $\{1, 3\} \in X$ (F)
10. $\{1, 3\} \subset X$ (V)
11. $\{a\} \subset X$ (F)
12. $\{a, b\} \subset X$ (F)
13. $\{\{a, b\}\} \subset X$ (V)
14. $\emptyset \subset \emptyset$ (V)
15. $\emptyset = \{\emptyset\}$ (F)

FIM