BACHARELADO EM SISTEMAS DE INFORMAÇÃO

MATEMÁTICA DISCRETA

Aula 3 - Quantificadores

Prof. Marcelo Gama

Universidade Federal Rural de Pernambuco - DM

23 de Agosto de 2011

Sumário

Sumário

Sentenças abertas

Definição

Dado um conjunto $A \neq \emptyset$, uma sentença aberta em A é uma expressão $p(x)$ de modo que, para cada $a \in A$, $p(a)$ é uma proposição. De outro modo, dado $a \in A$, tem-se $p(a)$ *Verdadeira* ou *Falsa*.

Exemplos:

- $A = \{a | a \text{ é disciplina do BSI}\}$

  $p(x)$: "Marcelo é professor da disciplina x"

- $A = \mathbb{N}$

  $q(x)$: "x é divisor de 12"

Sentenças abertas

Conjunto-verdade

O conjunto-verdade de uma sentença aberta, denotado por V_p, é formado por todos os elementos do conjunto A para os quais $p(a)$ é verdadeira.

Exemplos:

- $A = \{a | a \text{ é disciplina do BSI}\}$
  $p(x)$: "Marcelo é professor da disciplina x"
  $V_p = \{\text{Matemática discreta}\}$
- $A = \mathbb{N}$
  $q(x)$: "x é divisor de 12"
  $V_q = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Sumário

Situação 1: Fazendo uma afirmação sobre todos os números naturais

- $1^2 + 1 = 2$ é par.
- $2^2 + 2 = 6$ é par.
- $3^2 + 3 = 12$ é par.
- $4^2 + 4 = 20$ é par.
- $5^2 + 5 = 30$ é par.
- ....

Queremos dizer que $n^2 + n$ é sempre par quando $n \in \mathbb{N}$.

Quantificadores

Quantificador universal

Ingredientes

- $A \neq \emptyset$ um conjunto
- $p(x)$ sentença aberta em A.
- $V_p = \{x | x \in A \wedge p(x)\}$ conjunto-verdade de $p(x)$.

Definição: Quando $V_p = A$, temos $p(x)$ verdadeira para todo $x \in A$.
Representções simbólicas

- $(\forall x \in A)(p(x)) \longleftarrow$ usaremos esta
- $\forall x \in A, \;\; p(x)$
- $\forall x \in A : \;\; p(x)$

Quantificadores

Situação 1: Fazendo uma afirmação sobre todos os números naturais

- $1^2 + 1 = 2$ é par.
- $2^2 + 2 = 6$ é par.
- $3^2 + 3 = 12$ é par.
- $4^2 + 4 = 20$ é par.
- $5^2 + 5 = 30$ é par.
- ....

Denotamos este fato por: $(\forall n \in \mathbb{N})(n^2 + n \text{ é par.})$

Exemplo: $(\forall x \text{ aluno de matemática discreta })(x \text{ é estudioso.})$

Situação 2: Fazendo uma afirmação sobre alguns números naturais

- A expressão $n^2 + 1$ é um número primo para algum $n \in \mathbb{N}$.
- Existe $n \in \mathbb{N}$ que torna a expressão $n^2 + 1$ um número primo.

Nesse caso, queremos dizer que algum valor ou valores de n, mas não necessariamente todos, tornam $n^2 + 1$ um número primo.

Quantificador existencial

Ingredientes

- $A \neq \emptyset$ um conjunto
- $p(x)$ sentença aberta em A.
- $V_p = \{x | x \in A \wedge p(x)\}$ conjunto-verdade de $p(x)$, onde $V_p \neq \emptyset$.

Definição: Quando $V_p \neq \emptyset$, temos $p(x)$ verdadeira para algum $x \in A$.
Representções simbólicas

- $(\exists x \in A)(p(x)) \longleftarrow$ usaremos esta
- $\exists x \in A, \;\; p(x)$
- $\exists x \in A : \;\; p(x)$

Situação 2: Fazendo uma afirmação sobre alguns números naturais

- A expressão $n^2 + 1$ é um número primo para algum $n \in \mathbb{N}$.
- Existe $n \in \mathbb{N}$ que torna a expressão $n^2 + 1$ um número primo.

Denotamos este fato por: $(\exists n \in \mathbb{N})(n^2 + 1 \text{ é primo.})$

Situação 3: Apenas um valor satisfaz à condição dada.

- A equação $x^2 = 4$ admite uma única solução em $\mathbb{R}_+$; no caso, $x = 2$.

Nesse caso, dizemos que existe um único real positivo que satisfaz a equação $x^2 = 4$.

Quantificador de existência e unicidade

Ingredientes

- $A \neq \emptyset$ um conjunto
- $p(x)$ sentença aberta em A.
- $V_p = \{x | x \in A \wedge p(x)\}$ conjunto-verdade de $p(x)$, onde $V_p \neq \emptyset$.

Definição: Quando V_p é um conjunto unitário, temos $p(x)$ verdadeira para um único $x \in A$. Representções simbólicas

- $(\exists! \; x \in A)(p(x)) \longleftarrow$ usaremos esta
- $\exists! \; x \in A, \;\; p(x)$
- $\exists! \; x \in A : \;\; p(x)$

Situação 3: Apenas um valor satisfaz à condição dada.

- A equação $x^2 = 4$ admite uma única solução em $\mathbb{R}_+$; no caso, $x = 2$.

Denotamos este fato por: $(\exists!\, x \in \mathbb{R}_+)(x^2 = 4)$

Sumário

Variável aparente e variável livre

Tipos de variáveis

- **Aparente:** Incide algum quantificador sobre ela.
- **Livre:** Não incide quantificador sobre ela.

Exemplos:

- $x^2 - 5x + 6 = 0$ (x é livre)
- $(\exists x)(x^2 - 5x + 6 = 0)$ (x é aparente)

Sumário

Negação de proposições com quantificadores

Negação

- **Universal:** $\neg(\forall x)(p(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x))$
- **Existencial:** $\neg(\exists x)(p(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg p(x))$

Note a troca entre universal e existencial e a negação de $p(x)$!

Exemplos:

- "Todos os alunos chegaram cedo". $(\forall x \text{ aluno })(x \text{ chegou cedo})$.
- "Algum aluno não chegou cedo". $(\exists x \text{ aluno })(x \text{ não chegou cedo})$.

- "Existem alunos que chegam cedo". $(\exists x \text{ aluno })(x \text{ chegou cedo})$.
- "Nenhum aluno chega cedo". $(\forall x \text{ aluno })(x \text{ não chegou cedo})$.

Sumário

Sentenças abertas com mais de uma variável

Uma sentença aberta pode ter uma quantidade arbitrária, porém finita de variáveis.

- $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, onde $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n$

Exemplos:

- $p(x, y)$: "x é irmão de y"
- $q(x, y, z)$: "$z^2 = x^2 + y^2$"
- $r(x, y, z, t)$: "x é pai de y e z é mãe de t"
- $s(n_1, n_2, n_3)$: "$\frac{1}{2}(n_1 + n_2 + n_3 - Min\{n_1, n_2, n_3\}) \geq 7$"

Quantificadores

Quantificação parcial

Uma sentença pode conter, ao mesmo tempo, variáveis aparentes e variáveis livres.

- $(\exists x)(x + y < 10)$ x é aparente e y livre
- $(\forall x \text{ aluno do BSI })(x \text{ estuda na sala } y)$ x é aparente e y livre

Quantificação múltipla

Uma sentença pode conter diversos quantificadores.

- $(\forall x)(\exists y)(x + y < 10)$
- $(\forall x)(\exists y)(x \text{ é aluno do BSI } \wedge x \text{ estuda na sala } y)$
- $(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})\left((x + y)^2 > x^2 + y^2\right)$

Sumário

Comutatividade de quantificadores

Operadores do mesmo tipo comutam

- $(\forall x)(\forall y)(p(x,y)) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)(p(x,y))$
- $(\exists x)(\exists y)(p(x,y)) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)(p(x,y))$

Operadores de tipos distintos não comutam

- $(\forall x)(\exists y)(x \text{ é filho de } y)$
  "Todo mundo tem pai ou mãe" (V)
- $(\exists y)(\forall x)(x \text{ é filho de } y)$
  "y é pai ou mãe de todo mundo" (F)

Sumário

Negação com múltiplos quantificadores

Negação: Casos

- Dois quantificadores da mesma espécie
  $\neg(\forall x)(\forall y)(p(x,y)) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg(\forall y)(p(x,y)) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(\neg p(x,y))$

  $\neg(\exists x)(\exists y)(p(x,y)) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg(\exists y)(p(x,y)) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\neg p(x,y))$

- Dois quantificadores de espécies diferentes
  $\neg(\forall x)(\exists y)(p(x,y)) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg(\exists y)(p(x,y)) \Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\neg p(x,y))$

  $\neg(\exists x)(\forall y)(p(x,y)) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg(\forall y)(p(x,y)) \Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\neg p(x,y))$

- Três quantificadores
  $\neg(\forall x)(\exists y)(\forall z)(p(x,y,z)) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg(\exists y)(\forall z)(p(x,y,z)) \Leftrightarrow$
  $(\exists x)(\forall y)(\neg(\forall z)(p(x,y,z)) \Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\exists z)(\neg p(x,y,z))$